

Angelo FERRO - Gianni RAELI

*La relazione tra PIL ed addetti
al primario
Una verifica empirica*

Verona febbraio 2003

Indice

1. I cambiamenti strutturali di lungo periodo	3
2. La verifica empirica con i dati del 1977	10
3. La verifica empirica con i dati del 1960, 1970, 1980, 1990,2001	12
4. Conclusioni	13
Allegato n. 1	15
Allegato uno A	18
Allegato uno B	20
Allegato uno C	23
Allegato uno D	26
Allegato n. 2	29
Allegato due A	32
Allegato due B	39
Allegato due C	45
Allegato due D	51
Allegato n. 3	57
Allegato tre A	61
Allegato tre B	68

1. I cambiamenti strutturali di lungo periodo.

Si conviene da tutti gli storici e scienziati economici che la crescita economica abbia prodotto dei mutamenti essenziali nella struttura della occupazione e della produzione, in relazione ai cambiamenti verificatesi nella composizione della domanda, nella evoluzione tecnologica e nella specializzazione internazionale.

La maggior parte degli studiosi ritiene che **l'indicatore** più **conveniente** per descrivere lo sviluppo economico nel tempo sia costituito dal *PIL* o meglio dal *PIL pro capite*.

Gli studi recenti delle agenzie specializzate dell'ONU hanno elaborato indicatori più sofisticati, che hanno l'intenzione di armonizzare sviluppo economico materiale con benessere e quindi qualità della vita.

Tuttavia un primo approccio analitico non può prescindere, almeno nella verifica iniziale, della evoluzione del Prodotto Interno di una economia.

Altri studiosi hanno anche trovato significative relazioni tra crescita economica e diminuzione degli addetti al primario, arrivando, alcuni, ad utilizzare quale indicatore metrico proprio la percentuale di forza lavoro dedita al primario.

Con questa verifica noi non ci proponiamo di dimostrare nessuna delle affermazioni suddette.

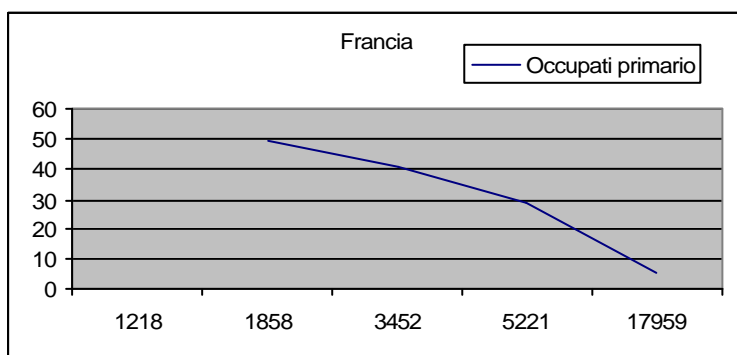
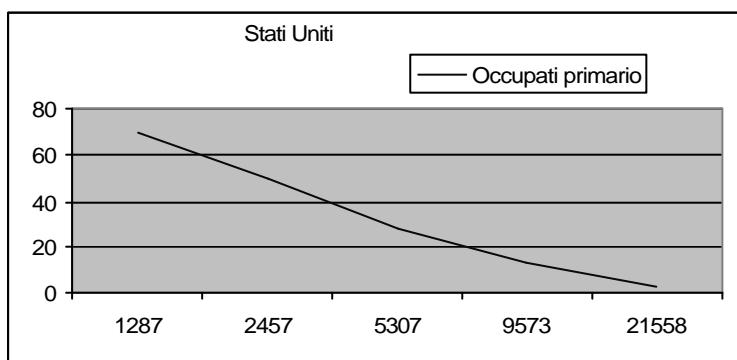
Abbiamo verificato in maniera immediata che esiste una relazione tra sviluppo economico e struttura della occupazione.

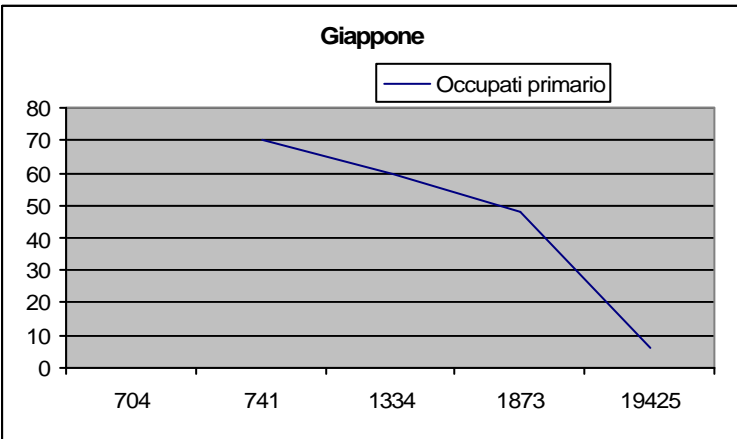
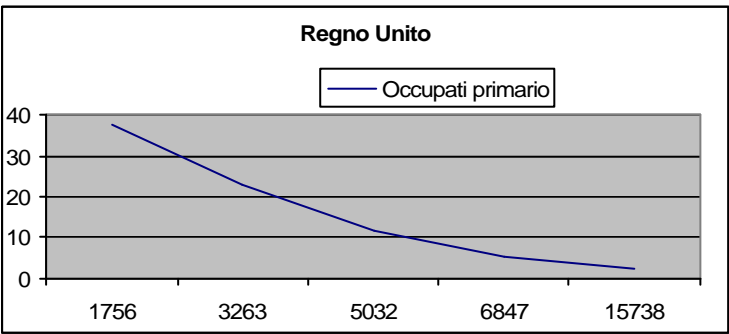
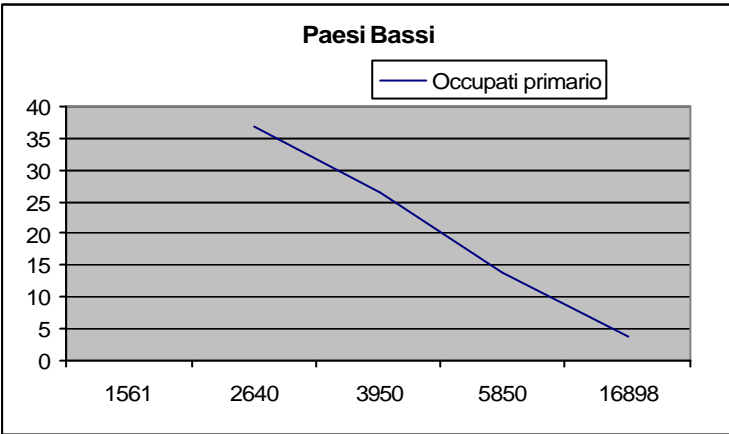
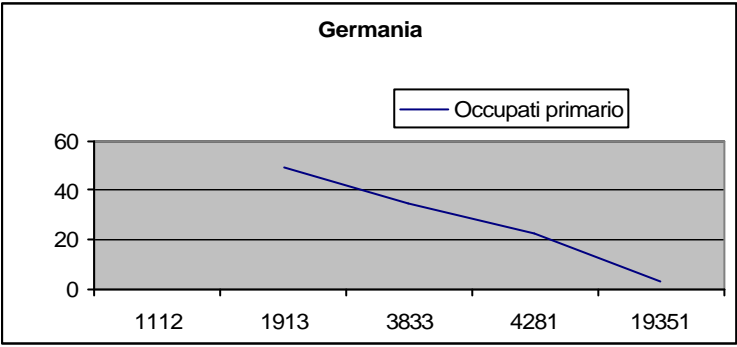
Riportiamo, come esempio di tale immediatezza, alcuni dati elaborati nella monumentale ricostruzione analitica effettuata da A. Maddison

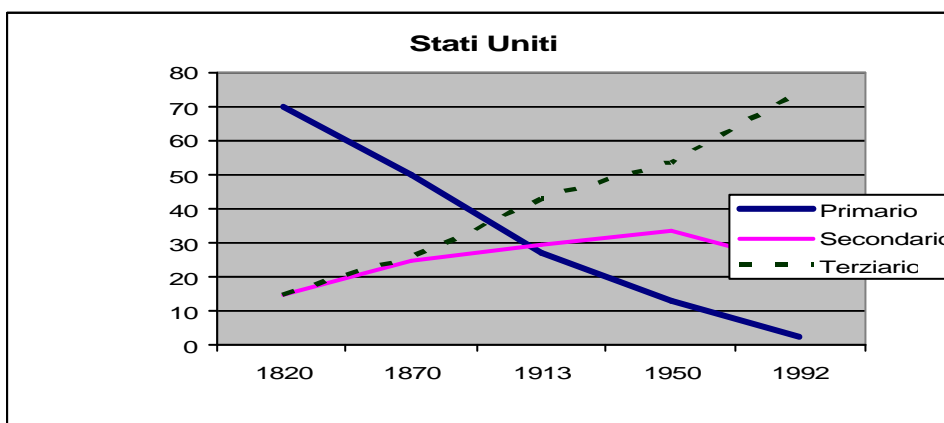
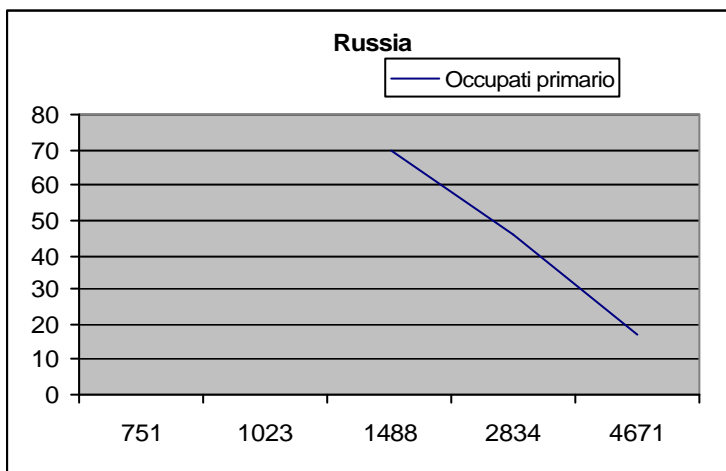
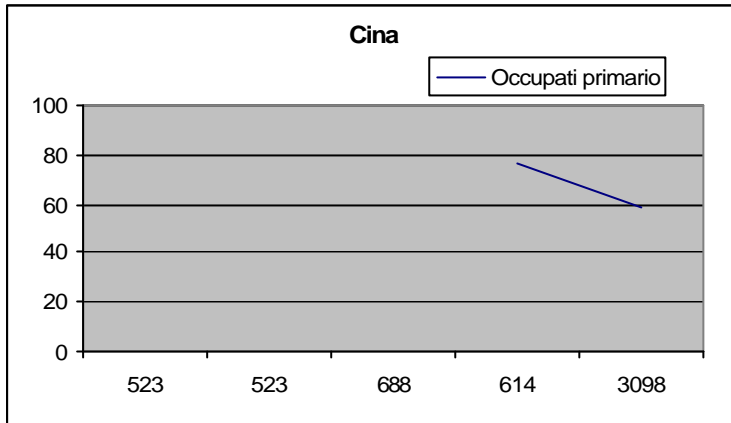
Tavola 1.1. – Ripartizione settoriale della forza lavoro tra il 1820 ed il 1992

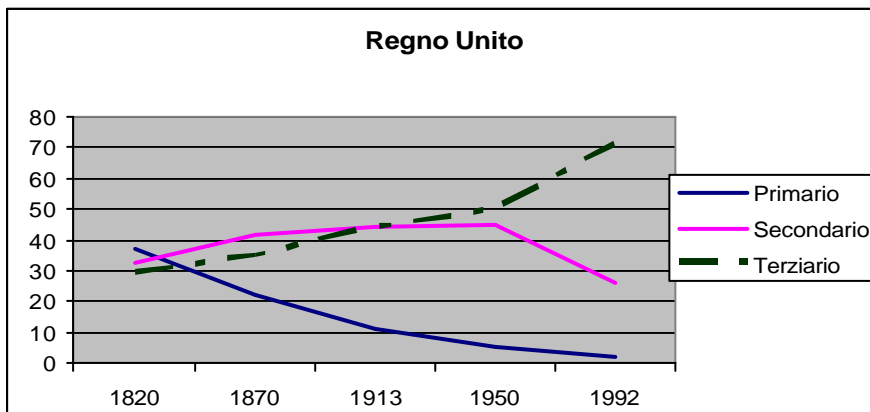
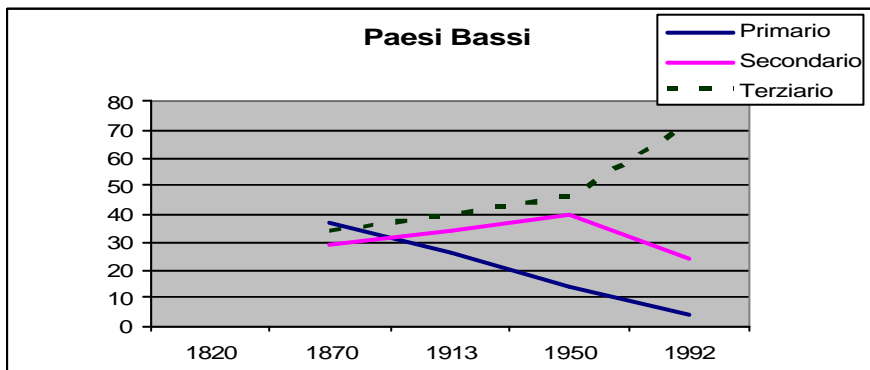
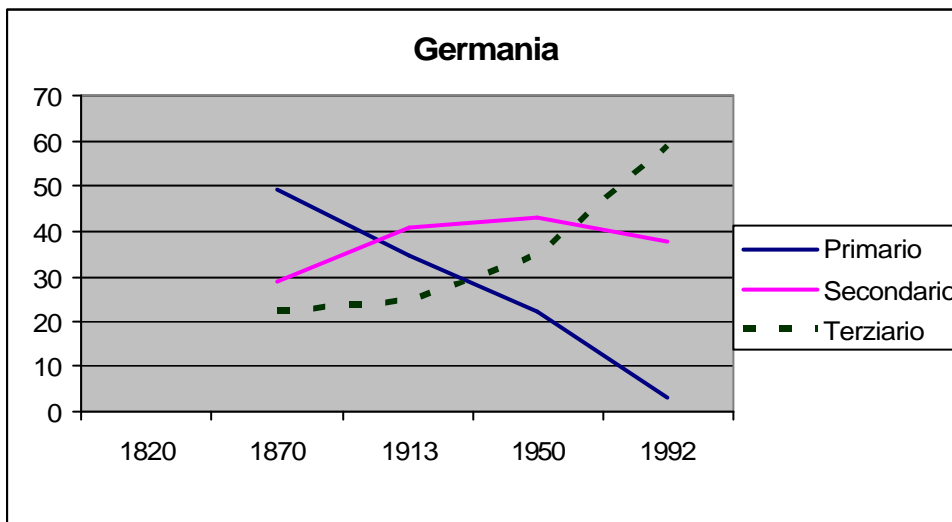
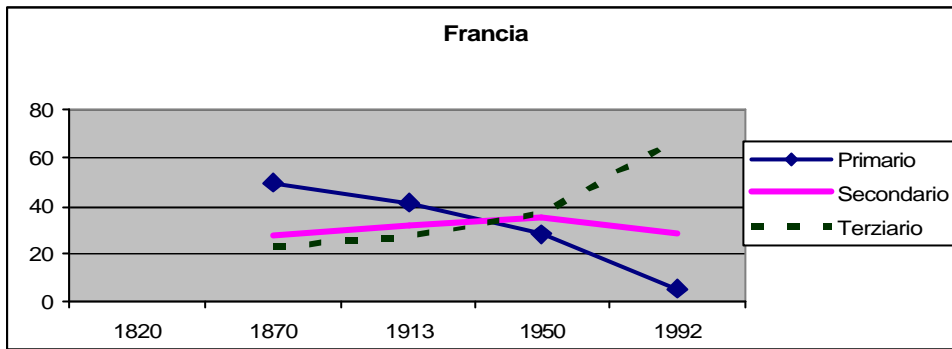
	Stati Uniti	Francia	Germania	Paesi Bassi	Regno Unito	Giappone	Cina	Russia
PRIMARIO								
1820	70.0	n.d.	n.d.	n.d.	37.6	n.d.	n.d.	n.d.
1870	50.0	49.2	49.5	37.0	22.7	70.1	n.d.	n.d.
1913	27.5	41.1	34.6	26.5	11.7	60.1	n.d.	70.0
1950	12.9	28.3	22.2	13.9	5.1	48.3	no	46.0
1992	2.8	5.1	3.1	3.9	2.2	6.4	58.6	17.0
SECONDARIO								
1820	15.0	n.d.	n.d.	n.d.	32.9	n.d.	n.d.	n.d.
1870	24.4	27.8	28.7	29.0	42.3	n.d.	n.d.	n.d.
1913	29.7	32.3	41.1	33.8	44.1	17.5	n.d.	n.d.
1950	33.6	34.9	43.0	40.2	44.9	22.6	7.0	29.0
1992	23.3	28.1	37.8	24.3	26.2	34.6	22.0	36.0
TERZIARIO								
1820	15.0	n.d.	n.d.	n.d.	29.5	n.d.	n.d.	n.d.
1870	25.6	23.0	21.8	34.0	35.0	n.d.	n.d.	n.d.
1913	42.8	26.6	24.3	39.7	44.2	22.4	n.d.	n.d.
1950	53.5	36.8	34.8	45.9	50.0	29.1	16.0	25.0
1992	74.0	66.8	59.1	71.8	71.6	59.0	20.0	47.0

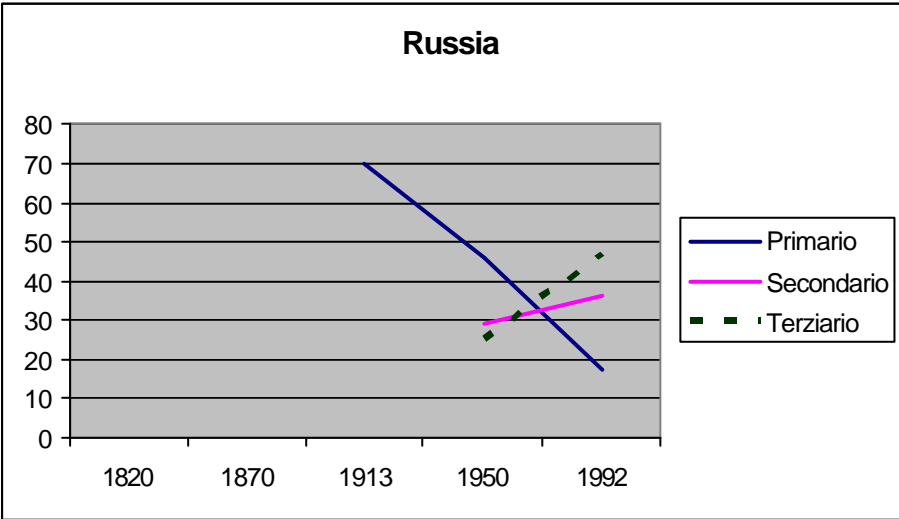
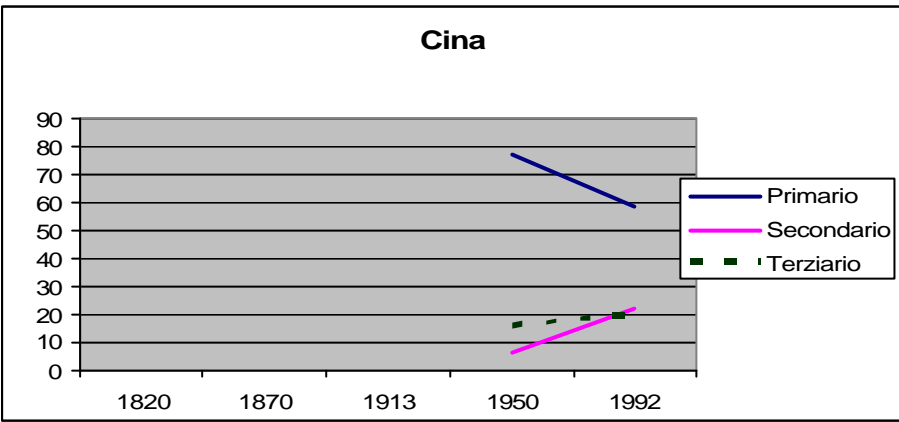
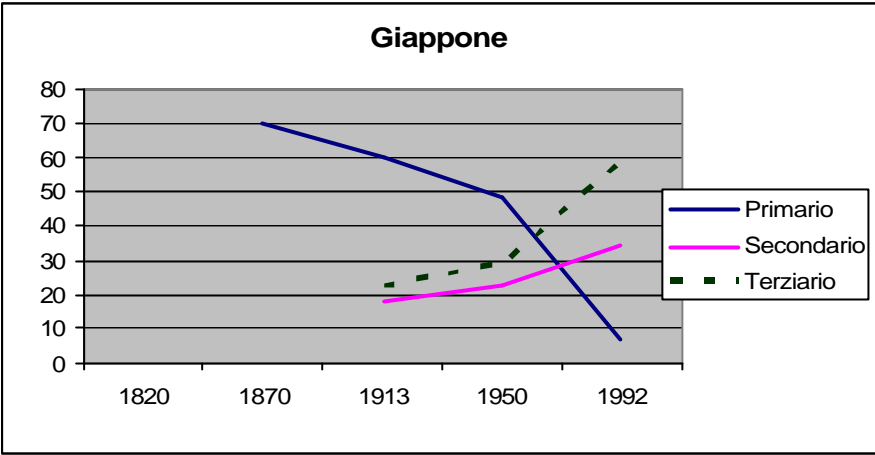
Fonte : MADDISON ANGUS, *L'économie mondiale, 1820-1992 – Analyse et statistiques – OCDE, Paris, 1995*

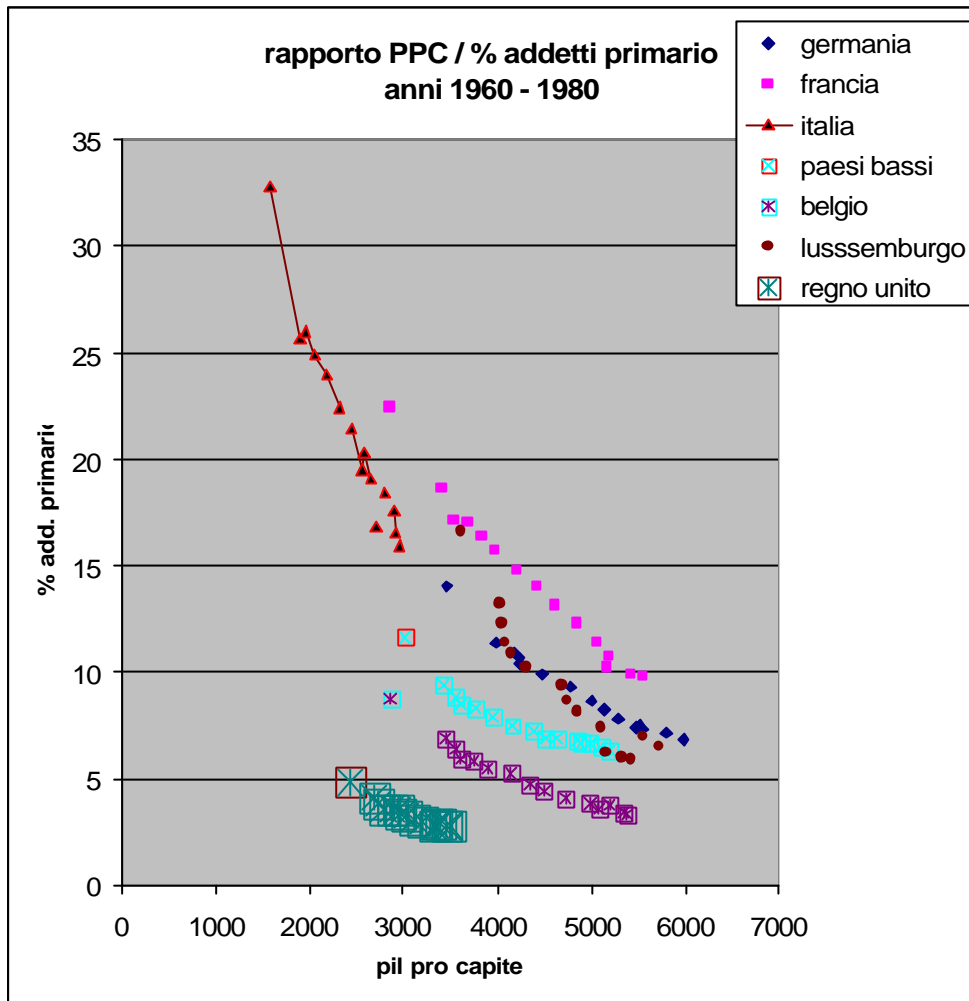












Con queste note ci apprestiamo ad effettuare una verifica empirica del teorema enunciato :

- 1) se ci sia una relazione tra evoluzione del Pil pro capite ed occupazione nel primario;
- 2) se sia possibile rappresentare tale relazione analiticamente;
- 3) quale curva tra le più note ed elementari rappresenti meglio il fenomeno.

2. La verifica empirica con i dati del 1977.

Riprendiamo una verifica effettuata qualche anno fa con i dati del 1977.

I dati sono riepilogati nell'*ALLEGATO N. 1*.

Riguardano 145 Paesi, e per ciascuno di essi è riportato :

- il PIL pro capite in lire italiane, valore medio 1977 ;
- il Pil pro capite in \$ US, anch'esso valore medio 1977;
- la percentuale della popolazione attiva occupata nel settore primario.

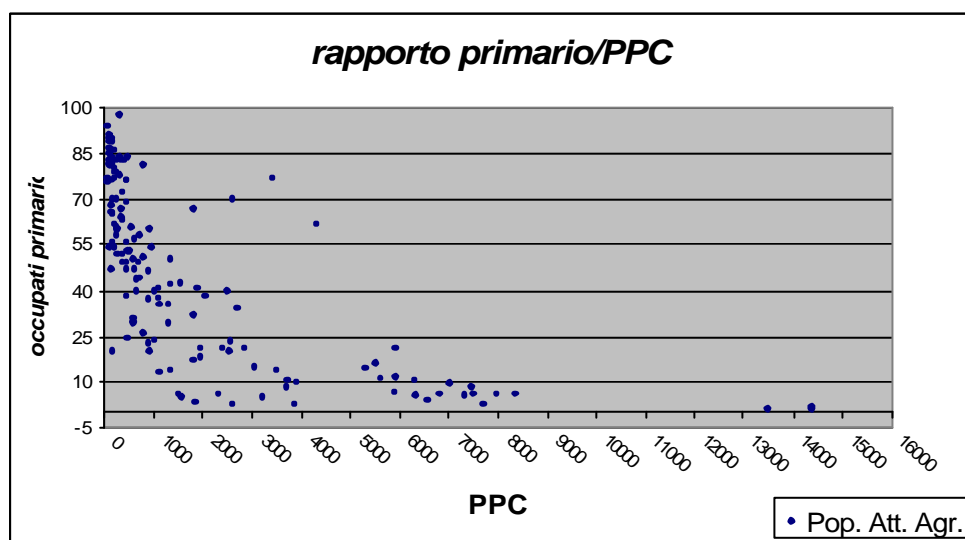
I dati relativi al PIL , nelle fonti, erano riportati in \$ US o in valuta nazionale;

quando erano riportati in valuta nazionale ci è stato possibile reperire il cambio ufficiale della valuta nazionale in \$ US o in lire italiane.

In tal modo è stato possibile compilare delle tabelle omogenee, anche se naturalmente esse soffrono delle approssimazione della media annua di un cambio ufficiale di valute.

I dati della tabella sono stati riportati in un grafico, ponendo :

- sull'asse delle ascisse il pil pro capite;
- sull'asse delle ordinate il valore percentuale degli addetti al primario.



Dall'esame immediato del grafico appare, come prima indicazione, che le probabili curve interpolanti potrebbero essere

- una *iperbole*;
- ovvero
- una *esponenziale negativa*.

Sono state quindi eseguite le interpolazioni con le curve suddette.

Per la *iperbole* è stata eseguita la interpolazione con le curve di equazione :

$y = a/x$ vds. *Allegato UNO A*

$y = a + b/x$ vds. *Allegato UNO B*

$y = ax + b/x$ vds. *Allegato UNO C*

Per la *esponenziale negativa* è stata eseguita la interpolazione con la curva di equazione

$y = A e^{-kx}$ vds. *Allegato UNO D*

Una volta ottenute le equazioni delle curve interpolanti si è provveduto a verificare quale fosse l'interpolante più adattabile ai dati posseduti

Utilizzando il test *chi - quadro* (χ^2) come indice di adattamento delle interpolazioni si è pervenuto al risultato che la curva che meglio si adatta ai dati posseduti è la curva *esponenziale negativa* del tipo

$$y = A e^{-kx}$$

<i>Interpolante</i>	<i>Tipo di equazione</i>	<i>Equazione</i>	$c^2 = \sum \frac{(y - y^*)^2}{y^*}$
<i>Iperbole Una</i>	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{10568,21}{x}$	11.723,7504
<i>Iperbole Due</i>	$y = a + \frac{b}{x}$	$y = 29,1730077 + \frac{6064,06743}{x}$	1.511,927
<i>Iperbole Tre</i>	$y = ax + \frac{b}{x}$	$y = 0,002211484 x + \frac{10349,35}{x}$	5.806,0338
<i>Esponenziale negativa</i>	$y = A * e^{Kx}$	$y = 58,529257456 * e^{-0,0003155x}$	1.401,05011

3. La verifica empirica con i dati del 1960, 1970, 1980, 1990, 2001.

Una ulteriore verifica è stata effettuata con i dati 1960, 1970, 1980 e 1990 e 2001

I dati sono riepilogati nell'ALLEGATO N. 2

La fonte dei dati è la Banca Mondiale.

Tutti i dati sono quelli riportati dalle pubblicazioni della Banca Mondiale aggiornati al dicembre 2002.

Come si noterà le economie testate statisticamente non riguardano tutti i Paesi Membri delle Nazioni Unite, perché il cambiamento dovuto alla caduta delle economie socialiste ha prodotto delle discontinuità :

- nei criteri con cui i Paesi ad economia socialista calcolavano le loro macrovariabili;
- nella consistenza territoriale e quindi economica dei nuovi aggregati socio – politico.

3.1 Verifica con i dati del 1960

Abbiamo seguito le stesse procedure descritte al paragrafo 2 che sono sintetizzate **nell'Allegato DUE A**

3.2 Verifica con i dati del 1970

Abbiamo seguito le stesse procedure descritte al paragrafo 2 che sono sintetizzate **nell'Allegato DUE B**

3.3 Verifica con i dati del 1980

Abbiamo seguito le stesse procedure descritte al paragrafo 2 che sono sintetizzate **nell'Allegato DUE C**

3.4 Verifica con i dati del 1990

Abbiamo seguito le stesse procedure descritte al paragrafo 2 che sono sintetizzate **nell'Allegato DUE D**

3.5 Verifica con i dati del 2001

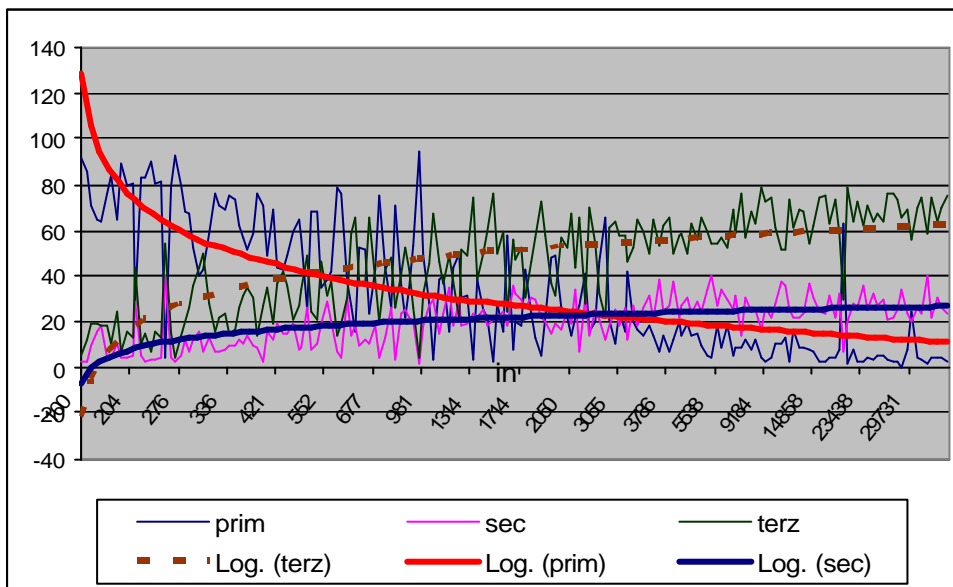
Abbiamo seguito le stesse procedure descritte al paragrafo 2 che sono sintetizzate **nell'Allegato TRE**

4. CONCLUSIONI.

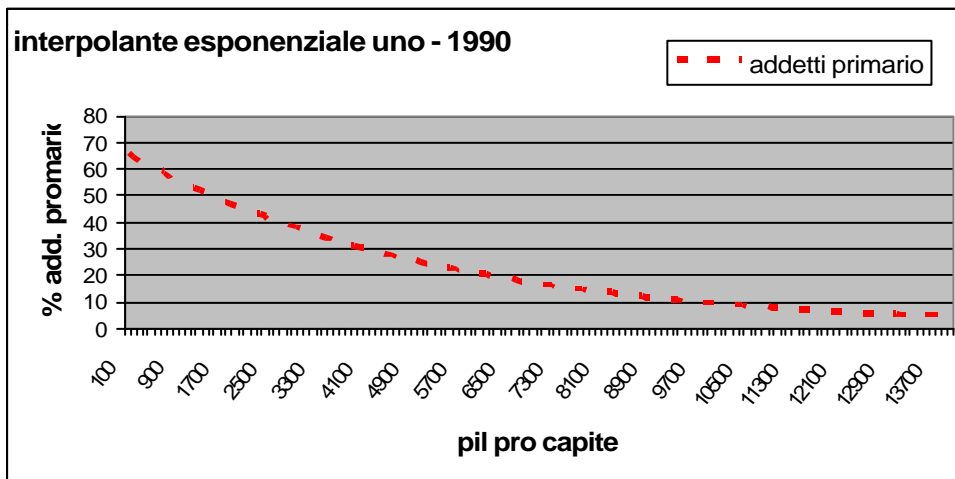
Abbiamo verificato che esiste una relazione tra crescita economica e struttura della occupazione.

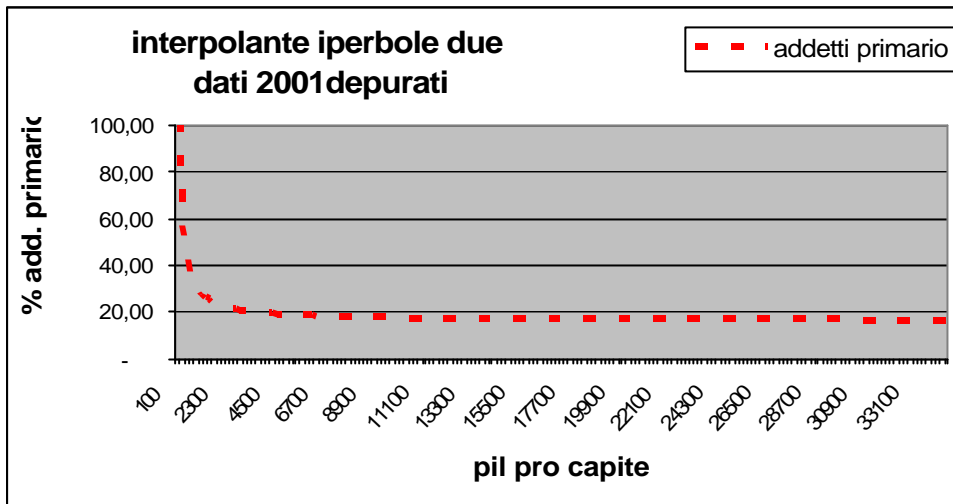
La relazione tra pil pro capite ed occupati nel primario, al di là dello sviluppo ciclico, è di natura inversa.

Mentre è diretto il rapporto tra crescita del pil e occupati nel secondario e nel terziario.



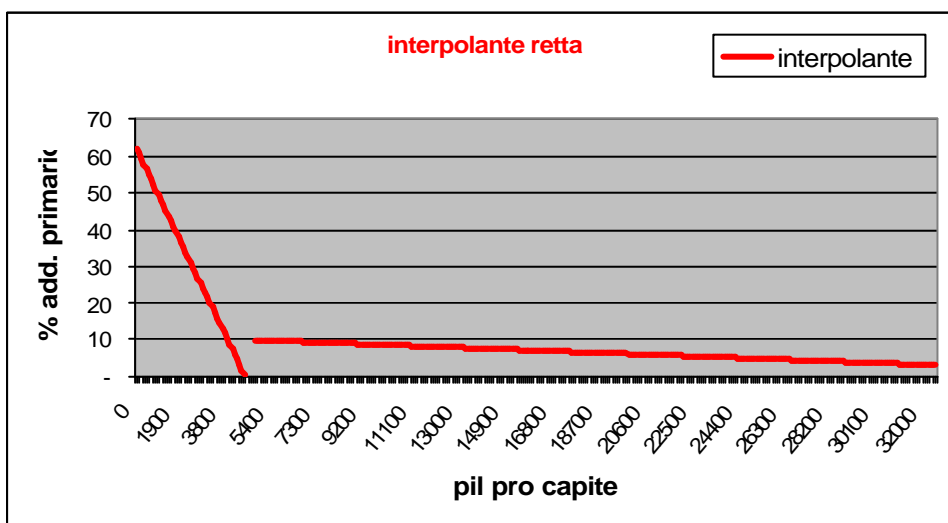
Volendo verificare delle interpolanti con equazione relativamente semplice si è trovato che le interpolanti che meglio si adattano ai dati possono essere o una esponenziale negativa o il ramo positivo di una iperbole equilatera.





ed il passo successivo è stato quello di verificare che probabilmente l'interpolante migliore è una semiretta che ha inclinazione diversa :

- 0,014 per un valore di pil pro capite che vada da 0 a 4400 \$ US
- 0,000244 per un valore di pil pro capite che vada da 4400 \$ US in poi.



Il tutto è descritto analiticamente negli allegati.

ALLEGATO N. 1.**Pil pro capita e popolazione attiva addetta al primario**

	Economy	PPC 1000 Lit 1977	PPC \$US 1977	Pop. Att. Agri.
	1	2	3	4
1	Afghanistan	200	226,7573696	80
2	Algeria	954	1081,632653	54
3	Alto Volta	108	122,4489796	83
4	Angola	288	326,5306122	60
5	Argentina	1332	1510,204082	14
6	Australia	5904	6693,877551	6,5
7	Austria	5625	6377,55102	11,2
8	Bahamas, The	3204	3632,653061	5
9	Bahrain	2340	2653,061224	6
10	Bangladesh	99	112,244898	85
11	Belgium	6570	7448,979592	3,7
12	Benin	126	142,8571429	47
13	Bhutan	68	77,09750567	94
14	Birmania	108	122,4489796	54
15	Bolivia	360	408,1632653	52
16	Botswana	396	448,9795918	83
17	Brazil	1080	1224,489796	41
18	Brunei	5940	6734,693878	11,5
19	Bulgaria	2070	2346,938776	38
20	Cambodia	60,5	68,59410431	77
21	Cameroon	342	387,755102	83
22	Canada	7515	8520,408163	6,2
23	Cape Verde	234	265,3061224	60
24	Central African Republic	180	204,0816327	89
25	Chad	108	122,4489796	86,6
26	Chile	918	1040,816327	20
27	China	378	428,5714286	63
28	Colombia	576	653,0612245	31
29	Comore	162	183,6734694	65
30	Congo, Dem. Rep.	450	510,2040816	38
31	Costa Rica	900	1020,408163	22,6
32	Côte d'Ivoire	792	897,9591837	81
33	Cuba	774	877,5510204	26
34	Cyprus	1314	1489,795918	35,5
35	Czech Republic	3510	3979,591837	14
36	Denmark	7479	8479,591837	8,5
37	Dominican Republic	720	816,3265306	58,2
38	Ecuador	630	714,2857143	47
39	Egypt, Arab Rep.	261	295,9183673	52
40	Ethiopia	90	102,0408163	81
41	Fiji island	1116	1265,306122	35,5
42	Finland	5508	6244,897959	16,2
43	France	6300	7142,857143	10,6
44	Gabon	228	258,5034014	58

45	Gambia, The	180	204,0816327	81
46	Germany rep dem (est)	3906	4428,571429	10
47	Germany rep (ovest)	7344	8326,530612	5,3
48	Ghana	504	571,4285714	53
49	Greece	2502	2836,734694	40
50	Guatemala	612	693,877551	57
51	Guinea	180	204,0816327	82
52	Guinea-Bissau	135	153,0612245	84
53	Guinea equatoriale	306	346,9387755	78
54	Guyana	468	530,6122449	24,3
55	Haiti	180	204,0816327	70
56	Honduras	342	387,755102	64
57	Hong Kong, China	1836	2081,632653	3,2
58	India	144	163,2653061	66
59	Indonesia	216	244,8979592	62
60	Iran, Islamic Rep.	1890	2142,857143	41
61	Iraq	1332	1510,204082	42
62	Ireland	2556	2897,959184	23,2
63	Israel	3690	4183,673469	8
64	Italy	3042	3448,979592	15
65	Jugoslavia	1530	1734,693878	42,3
66	Jamaica	1026	1163,265306	24
67	Japan	5301	6010,204082	14,1
68	Jordan	585	663,2653061	29
69	Kenya	216	244,8979592	79
70	Korea, Dem. Rep.	432	489,7959184	49
71	Korea, Rep.	648	734,6938776	43,5
72	Kuwait	14400	16326,53061	1,7
73	Lao PDR	81	91,83673469	75,8
74	Lesotho	162	183,6734694	86
75	Liberia	360	408,1632653	72,2
76	Libya	5940	6734,693878	21
77	Luxembourg	6354	7204,081633	5,7
78	Madagascar	198	224,4897959	86
79	Malawi	126	142,8571429	86
80	Malaysia	792	897,9591837	51
81	Mali	90	102,0408163	89
82	Malta	1494	1693,877551	6
83	Martinica	1945	2205,21542	18
84	Mauritania	306	346,9387755	84
85	Mauritius	576	653,0612245	30
86	Mexico	1044	1183,673469	39,5
87	Morocco	486	551,0204082	53
88	Mozambique	144	163,2653061	68
89	Nepal	108	122,4489796	91
90	Netherlands	6804	7714,285714	6,3
91	New Zealand	3744	4244,897959	10,2
92	Nicaragua	900	1020,408163	46,4
93	Niger	144	163,2653061	90
94	Nigeria	450	510,2040816	56
95	Norway	7020	7959,183673	9,3
96	Pakistan	162	183,6734694	56

97	Panama	1098	1244,897959	37,4
98	Paraguay	594	673,4693878	50
99	Paupasia	468	530,6122449	83,8
100	Peru	648	734,6938776	40
101	Philippines	370	419,5011338	49
102	Poland	2714	3077,097506	34
103	Polinesia francese	2592	2938,77551	70
104	Portugal	1584	1795,918367	5,2
105	Qatar	14400	16326,53061	0,9
106	Rhodesia	540	612,244898	61
107	Riunione	1800	2040,816327	32
108	Romania	1350	1530,612245	50
109	Rwanda	108	122,4489796	90
110	Salvador el	441	500	47
111	Samoa	342	387,755102	67
112	Saudi Arabia	4320	4897,959184	62
113	Senegal	432	489,7959184	76
114	Sierra Leone	1800	2040,816327	67
115	Singapore	2592	2938,77551	2,8
116	Solomone isole	306	346,9387755	98
117	Somalia	108	122,4489796	82
118	South Africa	1296	1469,387755	29
119	Spain	2833	3212,018141	20,7
120	Sri Lanka	198	224,4897959	54
121	Sudan	252	285,7142857	79
122	Suriname	170	192,7437642	20
123	Swaziland	450	510,2040816	76
124	Sweden	8370	9489,795918	6,2
125	Switzerland	7992	9061,22449	6
126	Syrian Arab Republic	702	795,9183673	49
127	Taiwan	900	1020,408163	37
128	Tanzania	162	183,6734694	83
129	Thailand	3420	3877,55102	77
130	Togo	234	265,3061224	70
131	Trinidad and Tobago	1800	2040,816327	17
132	Tunisia	720	816,3265306	44
133	Turkey	918	1040,816327	60
134	Uganda	225	255,1020408	83
135	United Arab Emirates	13500	15306,12245	0,9
136	United Kingdom	3870	4387,755102	2,5
137	United States	7722	8755,102041	2,6
138	Ungheria	1960	2222,222222	21
139	URSS	2520	2857,142857	20
140	Uruguay	1116	1265,306122	13
141	Venezuela, RB	2412	2734,693878	21
142	Yemen, Rep.	216	244,8979592	77
143	Yemen Dem. Pop.	252	285,7142857	61
144	Zaire	135	153,0612245	76
145	Zambia	432	489,7959184	69

LEGENDA.

Colonna 1 : Paesi od economie -- Colonna 2 : Pil pro capita espresso in lire italiane – valore 1977
Colonna 3 : Pil pro capita espresso in \$ US – valore 1977

INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = \frac{a}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati dobbiamo avere

$$\sum \frac{y}{x} = a * \sum \frac{1}{x^2} \quad \text{da cui } a = \frac{\sum \frac{y}{x}}{\sum \frac{1}{x^2}}$$

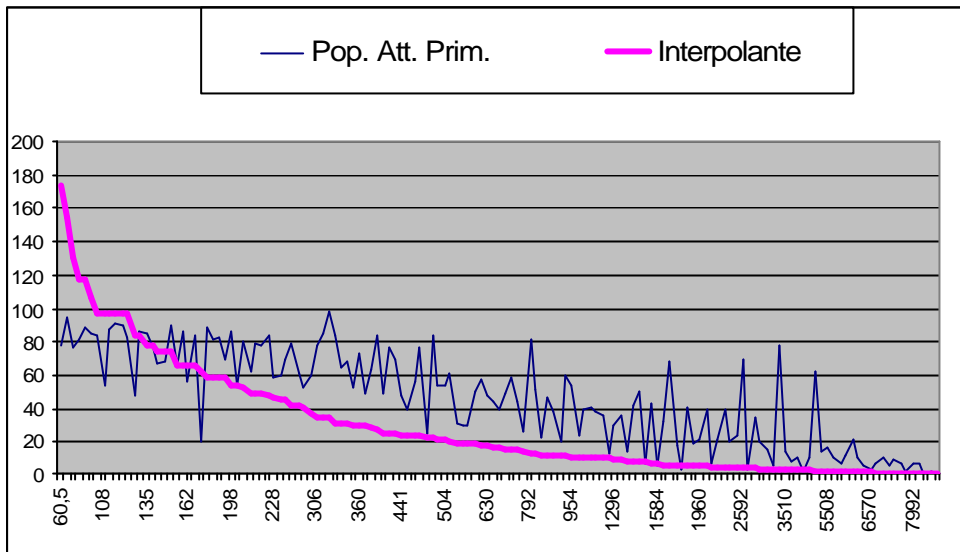
utilizzando i dati riportati nell'allegato uno otteniamo

$$a = 10.568,21$$

$$y = \frac{10568,21}{x}$$

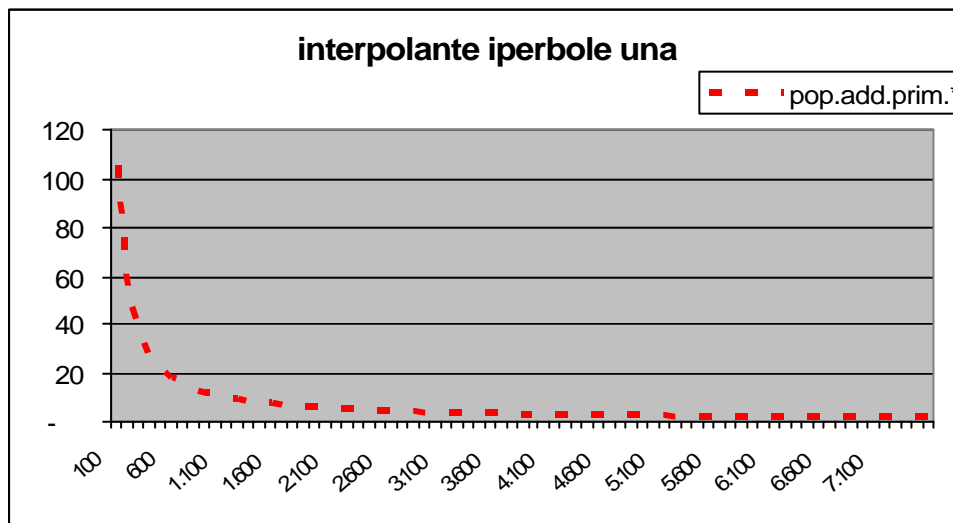
Che ci permettono di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 1.A.1



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 1.A.2



INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = a + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati dobbiamo avere

$$\left\{ \begin{array}{l} na + b \sum \frac{1}{x} = \sum y \\ \sum \frac{1}{x} a + b \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{y}{x} \end{array} \right.$$

e, risolvendo, otteniamo

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum \frac{1}{x} \\ \sum \frac{1}{x} & \sum \frac{1}{x^2} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum \frac{y}{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

Da cui

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}' * \mathbf{c} \quad \text{dove} \quad A' = \frac{\bar{A}}{|A|} \quad \text{con } \bar{A} \text{ matrice aggiunta, ovvero matrice dei cofattori}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} n & \sum \frac{1}{x} \\ \sum \frac{1}{x} & \sum \frac{1}{x^2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \sum \frac{1}{x^2} & -\sum \frac{1}{x} \\ -\sum \frac{1}{x} & n \end{bmatrix}$$

da cui utilizzando i dati riportati nell' *Allegato N. 1* otteniamo

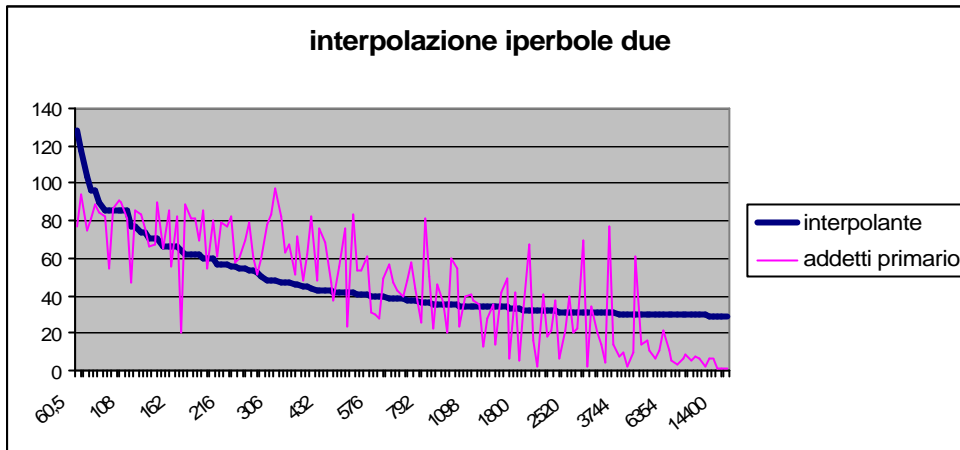
A =	145	0,4076	A adj	0,0027	-0,4076	
	0,4076	0,0027		-0,4076	145	
det A		0,22536224	A'	0,011980712	-1,80864372	
				-1,80864372	643,4085852	
			A' * c = x	0,011980712	-1,80864372	6701,8
				-1,80864372	643,4085852	28,2639
				a	b	e
				c	d	f
				x	a*e + b*f	29,1730077
					c*e + d*f	6064,06743

Da cui l'equazione interpolante

$$y = 29,1730077 + \frac{6064,06743}{x}$$

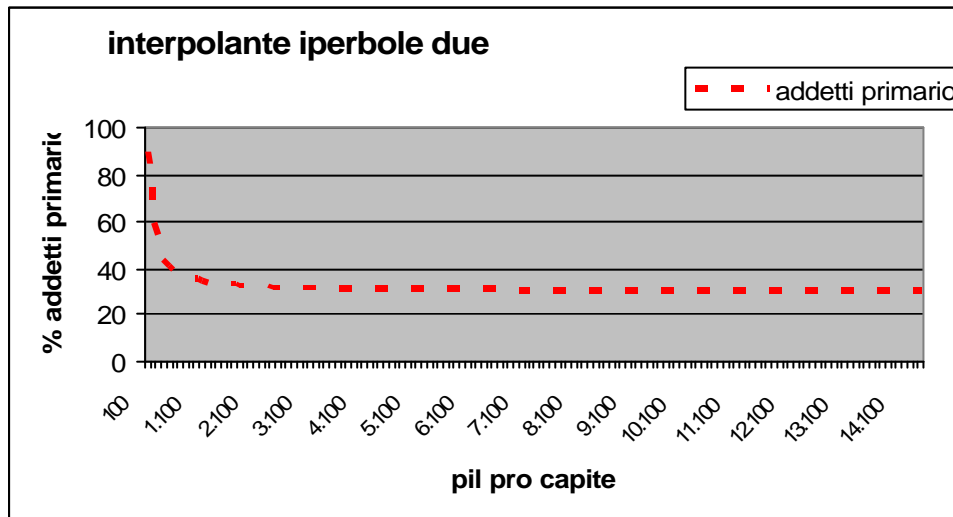
che ci permette di ottenere una curva rappresentata nelle *figure 1.B.1 e 1.B.2*

Figura. 1.B.1.



che, nella scala monometrica, diventa

Figura. 1.B.2.



INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati dobbiamo avere

$$\begin{cases} a \sum x^2 + nb = \sum yx \\ na + b \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{y}{x} \end{cases}$$

e, risolvendo, otteniamo

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} \sum x^2 & n \\ n & \sum \frac{1}{x^2} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \sum yx \\ \sum \frac{y}{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

Da cui

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}' * \mathbf{c} \quad \text{dove} \quad A' = \frac{\bar{A}}{|A|} \quad \text{con } \bar{A} \text{ matrice aggiunta, ovvero matrice dei cofattori}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \sum x^2 & n \\ n & \sum \frac{1}{x^2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \sum \frac{1}{x^2} & -n \\ -n & \sum x^2 \end{bmatrix}$$

da cui utilizzando i dati riportati nell'allegato uno otteniamo

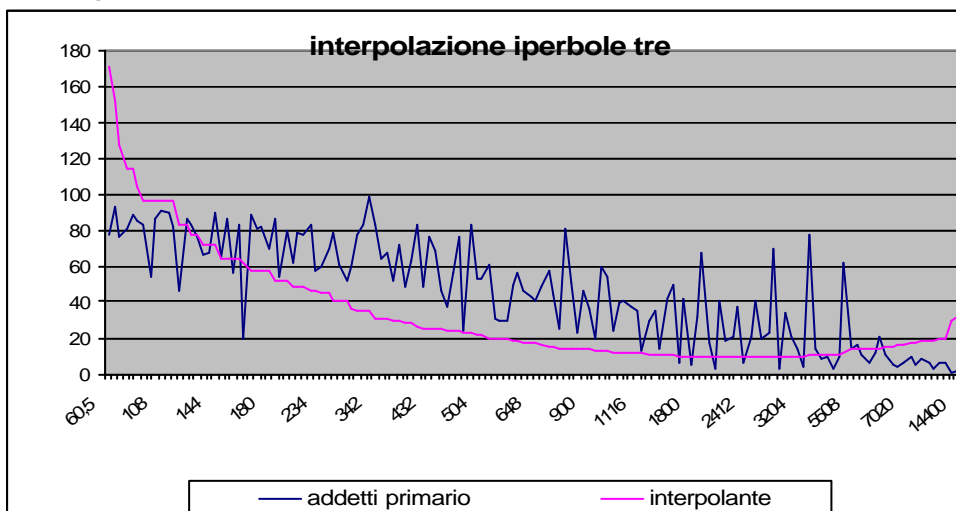
A =	1.618.489,574	145	A adj	0	-	145
	145	0,0027		-	145	1.618.489,574
det A	4.348.896,85		A⁻¹	0,000000001	-	0,000033342
				-	0,000033342	372,160947914
			A⁻¹ * c = x	0,000000001	-	0,000033342
				-	0,000033342	372,160947914
						5.079.919,40
						28,263900000
			a	b		e
			c	d		f
			x	a*e + b*f		0,002211484
				c*e + d*f		10.349,35

Da cui l'equazione interpolante

$$y = 0,002211484 * x + \frac{10349,35}{x}$$

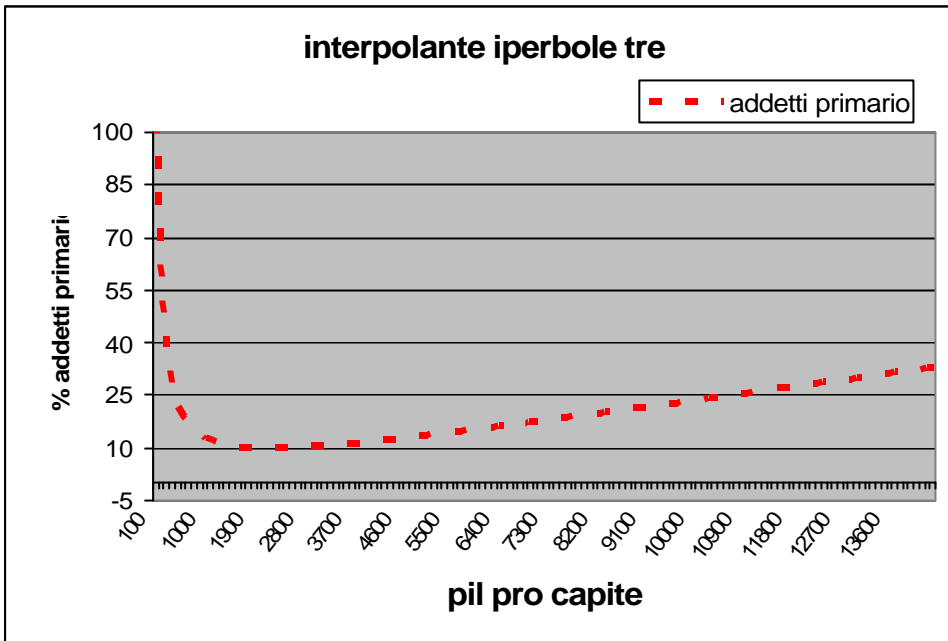
che ci permette di ottenere una curva rappresentata nelle *figure 1.C.1 e 1.C.2*

Figura. 1.C.1



che, nella scala monometrica, diventa

Figura. 1.C.2



INTERPOLAZIONE CON UNA ESPONENZIALE NEGATIVA del tipo

$$y = A * e^{Kx} \quad (1)$$

operando sulla (1) otteniamo

$$\log y = \log A + K x \log e$$

$$\log y = \log A + K x$$

$$\begin{aligned} \text{poniamo : } a &= \log A \\ z &= \log y \\ u &= x \end{aligned}$$

$$z = a + K * u$$

dove **a e K** sono i coefficienti da stimare (ai minimi quadrati)

$$s = \sum (a + Ku - z')^2 = \min$$

da cui

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial a} &= 2 \sum (a + Ku - z') = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial K} &= 2 \sum (a + Ku - z') * u = 0 \end{aligned} \right.$$

risolvendo e sostituendo otteniamo

$$\left\{ \begin{aligned} na + \sum xK &= \sum \log y \\ \sum xa + \sum x^2 K &= \sum x \log y \end{aligned} \right.$$

e, risolvendo, otteniamo

$$\mathbf{A * x = b}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} a \\ K \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \sum \log y \\ \sum x \log y \end{bmatrix}$$

Da cui

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}' * \mathbf{c} \quad \text{dove} \quad \mathbf{A}' = \frac{\overline{\mathbf{A}}}{|\mathbf{A}|} \quad \text{con } \overline{\mathbf{A}} \text{ matrice aggiunta, ovvero matrice dei cofattori}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sum x^2 & -\sum x \\ -\sum x & n \end{bmatrix}$$

da cui utilizzando i dati riportati nell'allegato uno otteniamo

A =	145	275.635	A adj	1.618.489.574	-	275.635	
	275.635	1.618.489.574,25		-	275.635	145	
det A		158.706.610.676	A'	0,010197997	-	0,000001737	
				-	0,000001737	0,000000001	
			A' * c = x	0,010197997	-	0,000001737	503,12
				-	0,000001737	0,000000001	611.063.8442
				a	b	e	
				c	d	f	
				x	a*e + b*f		4,069526757
					c*e + d*f	-	0,0003155

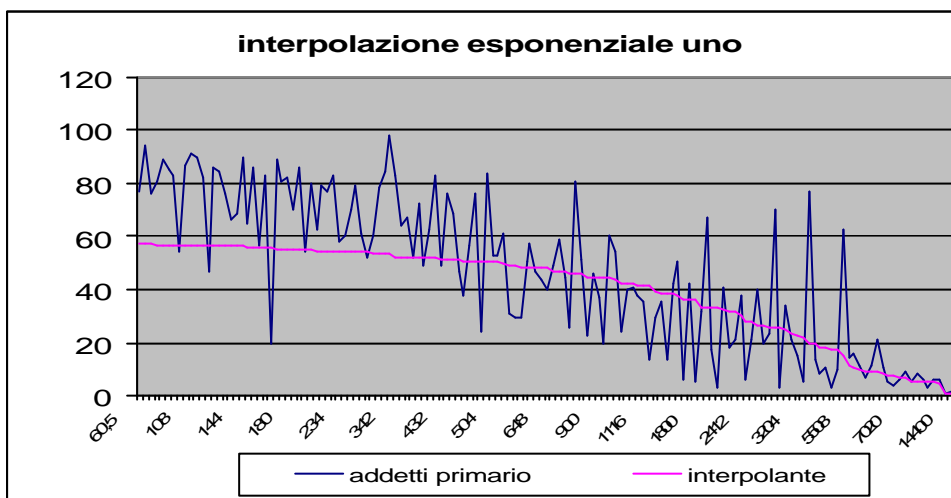
a = 4,069526757
A= 58,529257456
K= -0,0003155

Da cui l'equazione interpolante

$$y = 58,529257456 * e^{-0,0003155x}$$

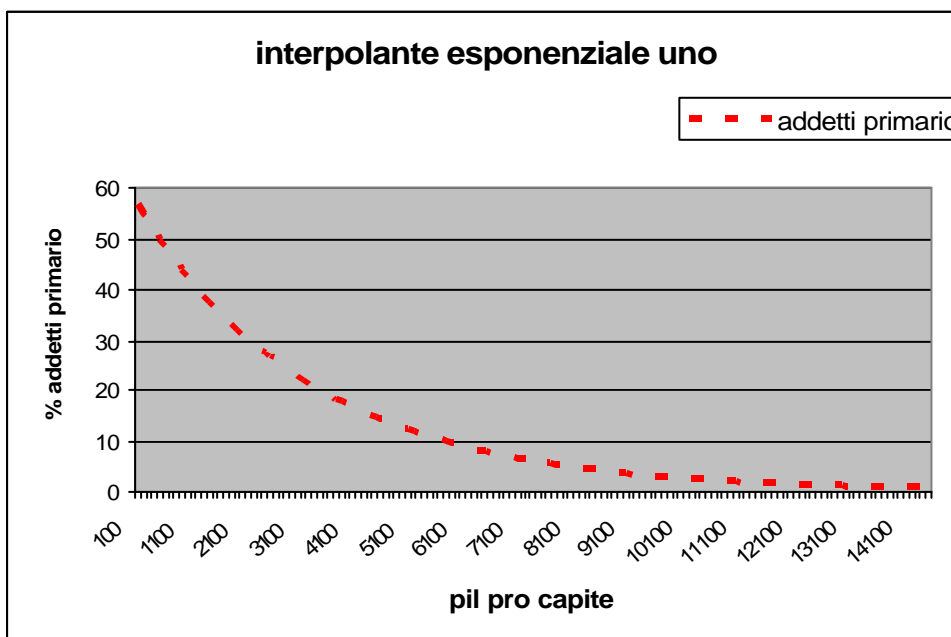
che ci permette di ottenere una curva rappresentata nelle *figure 1.D.1 e 1.D.2*

Figura. 1.D.1



che, nella scala monometrica, diventa

Figura. 1.D.2



Pil pro capite e popolazione attiva addetta al primario

	Economy	1960	1960	1970	1970	1980	1980	1990	1990
		PPC	Add. Pri.	PPC	Add. Pri.	PPC	Add. Pri.	PPC	Add. Pri.
1	Algeria	1723	71.06	1826	55.38	2758	35.84	2777	26.13
2	Angola	931	81.11	1165	78.33	675	76.42	678	74.52
3	Argentina	4462	20.61	5637	16.01	6506	12.95	4706	12.15
4	Australia	7782	11.32	10756	8.05	12520	6.49	14445	5.52
5	Austria	5143	23.83	7510	14.77	10509	9.91	12695	7.76
6	Bahamas, The	7082	20.20	10368	7.59	11305	5.77	12535	5.29
7	Bangladesh	952	87.65	1280	83.48	1085	72.45	1390	65.17
8	Barbados	2666	26.38	4638	16.79	6379	9.93	7252	6.66
9	Belgium	5495	7.96	8331	4.83	11109	2.95	13232	2.63
10	Belize	1881	42.40	2370	40.09	3943	38.55	3464	33.70
11	Benin	1100	85.02	1118	80.94	1114	67.32	920	63.53
12	Bolivia	1148	55.34	1661	55.05	1989	52.82	1658	46.84
13	Botswana	535	92.71	823	81.52	1940	63.89	2285	46.47
14	Brazil	1784	55.17	2434	47.24	4303	36.67	4042	23.28
15	Burkina Faso	456	91.85	374	92.00	457	92.20	511	92.42
16	Burundi	640	94.66	341	93.54	480	92.84	550	91.64
17	Cameroon	641	89.23	804	84.91	1194	73.16	1226	69.67
18	Canada	7258	13.19	10124	7.79	14133	6.66	17173	3.37
19	Cape Verde	469	57.04	634	46.73	934	36.68	1058	30.59
20	Central African Republic	704	93.44	747	89.08	706	84.66	579	80.20
21	Chad	756	95.51	660	92.33	528	87.90	399	83.24
22	Chile	2885	30.33	3605	24.08	3892	20.90	4338	18.78
23	China	567	83.23	696	78.34	972	74.24	1324	72.24
24	Colombia	1684	52.07	2140	45.14	2946	40.49	3300	26.61
25	Comoros	543	85.90	693	83.29	631	80.66	564	77.52
26	Congo, Rep.	1123	68.20	1670	66.12	1931	58.06	2211	48.72
27	Congo, Dem. Rep.	489	79.30	686	75.43	476	71.64	384	67.79
28	Costa Rica	2096	51.25	2904	42.60	3717	34.99	3499	26.03
29	Cote d'Ivoire	1120	83.88	1615	75.60	1790	64.75	1213	59.77
30	Cyprus	2037	41.93	3753	38.44	5295	25.97	8368	13.55
31	Czech Republic	1603	25.78	2520	16.90	3731	13.05	4095	11.21
32	Denmark	6760	17.93	9670	11.18	11342	6.98	13909	5.56
33	Dominican Republic	1195	63.63	1536	47.54	2343	32.48	2166	24.81
34	Ecuador	1461	59.40	1789	51.49	3238	39.81	2755	33.26
35	Egypt, Arab Rep.	809	65.85	1163	61.18	1645	57.14	1912	40.30
36	El Salvador	1427	61.87	1810	56.81	2014	43.62	1824	36.41
37	Ethiopia	257	93.10	296	91.20	322	89.31	324	86.17
38	Fiji	2108	59.53	2592	51.53	3609	47.40	4007	45.58
39	Finland	5291	27.42	8108	19.63	10851	12.05	14059	8.39
40	France	5823	22.10	9200	13.61	11756	8.26	13904	5.49
41	Gabon	1789	85.33	3704	79.47	4797	65.48	3958	51.55
42	Gambia, The	602	88.96	722	86.92	1017	84.41	799	81.89
43	Germany, Fed. Rep. (former)	6570	15.01	9425	8.71	11920	6.94	14341	3.98
44	Ghana	894	63.25	1059	60.47	976	61.49	902	59.30
45	Greece	2093	52.16	4224	42.25	5901	31.22	6768	22.96
46	Guatemala	1660	66.11	2028	61.07	2574	53.82	2127	52.41

47	Guinea	559	93.57	467	92.25	817	90.89	767	87.18
48	Guinea-Bissau	503	91.10	699	89.30	471	87.49	689	85.35
49	Guyana	1596	38.01	1816	31.91	1927	26.62	1094	21.62
50	Haiti	924	79.93	834	74.41	1033	70.94	817	67.78
51	Honduras	1039	72.45	1237	67.41	1519	57.18	1377	41.40
52	Hong Kong, China	2247	7.77	4502	4.36	8719	1.32	14849	0.89
53	Hungary	1846	38.02	3358	25.13	4992	18.42	5357	15.22
54	Iceland	4964	24.67	6772	17.94	11566	10.31	13362	10.97
55	India	766	75.37	802	72.64	882	69.53	1264	64.02
56	Indonesia	638	74.80	715	66.30	1281	57.84	1974	55.17
57	Iran, Islamic Rep.	2946	57.56	4796	47.50	3434	39.04	3392	32.23
58	Iraq	3427	58.37	4409	52.68	7242	28.46	..	16.10
59	Ireland	3311	36.58	5015	26.36	6823	18.57	9274	14.34
60	Israel	3477	14.40	6004	9.67	7895	6.11	9298	4.13
61	Italy	4564	30.80	7568	18.79	10323	12.61	12488	8.60
62	Jamaica	1773	41.52	2645	33.06	2362	31.20	2545	24.62
63	Japan	2954	33.06	7307	19.64	10072	10.95	14331	7.28
64	Jordan	1162	49.89	1422	33.24	3384	17.83	2919	15.08
65	Kenya	659	87.86	586	85.75	911	82.25	911	79.56
66	Korea, Rep.	904	61.32	1680	49.14	3093	37.12	6673	18.11
67	Kuwait	..	1.45	38562	1.75	20018	1.89	..	1.17
68	Latvia	..	34.74	2268	19.14	3432	16.32	4544	15.78
69	Lesotho	313	47.35	419	42.42	994	40.05	972	39.97
70	Liberia	717	82.68	982	80.59	927	76.39	..	72.33
71	Luxembourg	7921	15.47	9782	7.91	11893	5.36	16280	3.61
72	Madagascar	1191	86.14	1146	84.24	984	81.55	675	78.12
73	Malawi	380	93.59	440	91.45	554	87.26	519	86.64
74	Malaysia	1420	63.26	2154	53.74	3799	40.78	5124	27.36
75	Mali	535	93.83	419	92.69	532	89.02	531	85.78
76	Malta	1374	9.46	2424	7.02	4483	8.19	6975	2.57
77	Mauritania	780	92.16	872	84.35	885	71.51	791	55.20
78	Mauritius	2862	39.62	2398	34.04	3988	27.15	5838	16.71
79	Mexico	2836	55.13	3987	43.82	6054	36.27	5827	27.82
80	Morocco	815	73.06	1342	65.10	1941	56.02	2151	44.66
81	Mozambique	1153	88.12	1497	86.23	923	84.27	760	82.72
82	Myanmar	316	80.95	418	78.39	505	75.82	..	73.25
83	Namibia	1790	71.05	2642	63.75	2904	56.56	2854	49.17
84	Nepal	628	94.89	670	94.32	892	93.70	1036	93.51
85	Netherlands	6077	10.76	9199	6.82	11284	5.56	13029	4.57
86	New Zealand	7960	14.77	9392	11.85	10362	11.22	11513	10.36
87	Nicaragua	1606	63.01	2359	51.02	1853	39.57	1294	28.55
88	Niger	532	94.20	805	92.76	717	91.28	483	89.80
89	Nigeria	567	73.15	767	70.96	1438	53.91	995	43.00
90	Norway	5610	19.83	8034	11.77	12141	8.26	14902	6.28
91	Oman	944	67.34	6633	56.91	6521	50.29	7883	44.74
92	Pakistan	638	65.76	1029	64.52	1110	63.17	1394	51.69
93	Panama	1575	51.06	2584	41.62	3392	28.93	2888	26.18
94	Papua New Guinea	1235	89.61	1896	86.37	1779	82.56	1425	79.19
95	Paraguay	1177	54.15	1394	49.73	2534	44.83	2128	38.91
96	Peru	2019	52.32	2736	48.27	2875	40.29	2188	35.58
97	Philippines	1133	63.64	1403	57.89	1879	52.37	1763	45.78
98	Portugal	1869	44.02	3306	31.75	4982	26.04	7478	17.82
99	Puerto Rico	3102	25.37	5780	13.75	6924	5.79	..	4.36
100	Reunion	1092	45.40	1960	37.24	2827	29.10	..	6.77
101	Romania	431	64.42	809	48.70	1422	34.81	1922	23.96
102	Rwanda	537	94.71	647	93.62	757	92.76	756	91.71
103	Saudi Arabia	3884	71.18	7838	64.18	13750	43.48	7161	19.09

104	Senegal	1047	83.84	1146	82.72	1134	80.73	1145	76.72
105	Singapore	1658	7.40	3017	3.43	7053	1.56	11710	0.36
106	Solomon I-lands	..	84.47	1482	81.73	1603	79.33	2157	76.62
107	Somalia	1103	84.26	921	81.32	744	78.34	..	75.32
108	South Africa	2191	37.51	3254	30.97	3496	17.29	3248	13.50
109	Spain	3123	41.14	5861	29.00	7390	18.44	9583	11.86
110	Sri Lanka	1259	56.28	1243	55.02	1635	51.68	2096	48.39
111	Sudan	861	86.87	817	78.87	866	72.20	757	69.48
112	Suriname	1983	29.06	2970	26.72	3737	23.74	2451	21.27
113	Swaziland	1248	75.16	2531	64.94	3057	49.98	2693	38.80
114	Sweden	7592	14.10	10766	8.31	12456	6.17	14762	4.41
115	Switzerland	9409	11.29	12942	7.78	14301	6.17	16505	5.52
116	Syrian Arab Republic	1575	60.69	2294	56.47	4467	38.71	3897	33.13
117	Tanzania	319	92.59	424	90.06	480	85.78	550	84.41
118	Thailand	943	83.71	1526	79.78	2178	70.92	3580	64.07
119	Togo	367	80.17	618	74.46	731	68.75	641	65.56
120	Trinidad and Tobago	5627	21.77	6795	18.56	11262	10.91	7764	11.10
121	Tunisia	1101	61.61	1442	49.17	2527	38.88	2910	28.14
122	Turkey	1622	78.72	2202	70.69	2874	60.47	3741	53.57
123	Uganda	598	92.68	647	89.93	534	87.07	554	84.51
124	United Kingdom	6823	4.01	8537	2.81	10167	2.60	13217	2.17
125	United States	9895	6.64	12963	4.29	15295	3.48	18054	2.84
126	Uruguay	3968	21.29	4121	18.68	5091	16.64	4602	14.21
127	Venezuela	6338	33.37	7753	26.01	7401	14.57	6055	12.02
128	Yemen, Rep.	..	82.43	879	78.49	1313	72.55	..	60.96
129	Yugoslavia, FR (Serbia/Montenegro)	1921	64.42	3297	50.17	5565	39.78	4548	29.70
130	Zambia	965	84.57	1117	79.05	971	75.92	689	74.40
131	Zimbabwe	989	80.79	1082	76.61	1206	72.39	1182	68.12

PPC : Pil pro capite in US \$ 1985

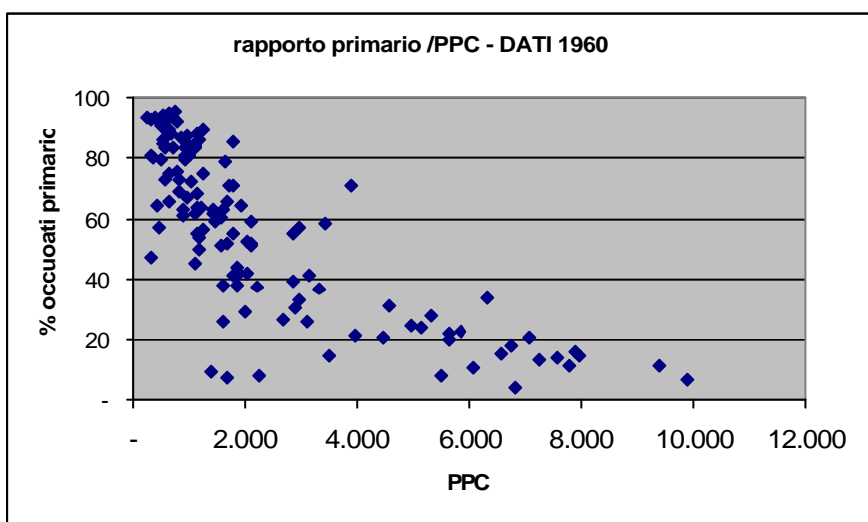
Add. Prim. : % della popolazione attiva occupata nel settore primario

VERIFICA CON I DATI DEL 1970.

1) Rappresentazione dei dati

I dati della tabella sono stati riportati in un grafico, ponendo :

- sull'asse delle ascisse il pil pro capite;
- sull'asse delle ordinate il valore percentuale degli addetti al primario.



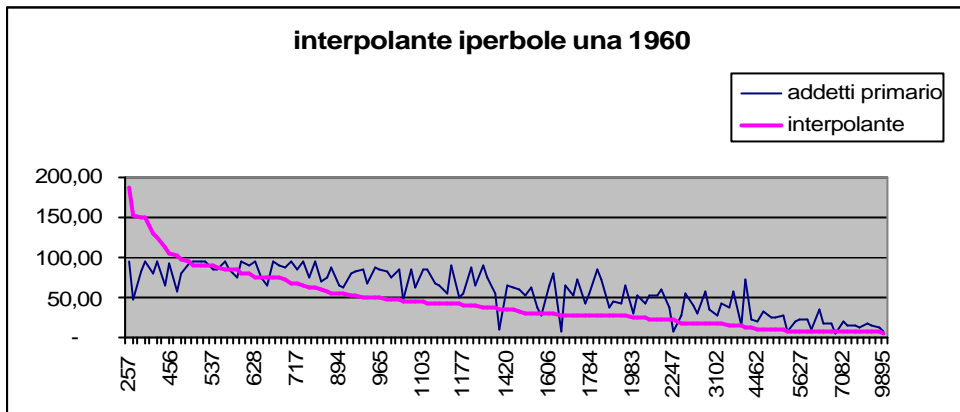
2) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = \frac{a}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = \frac{47591,8526}{x}$

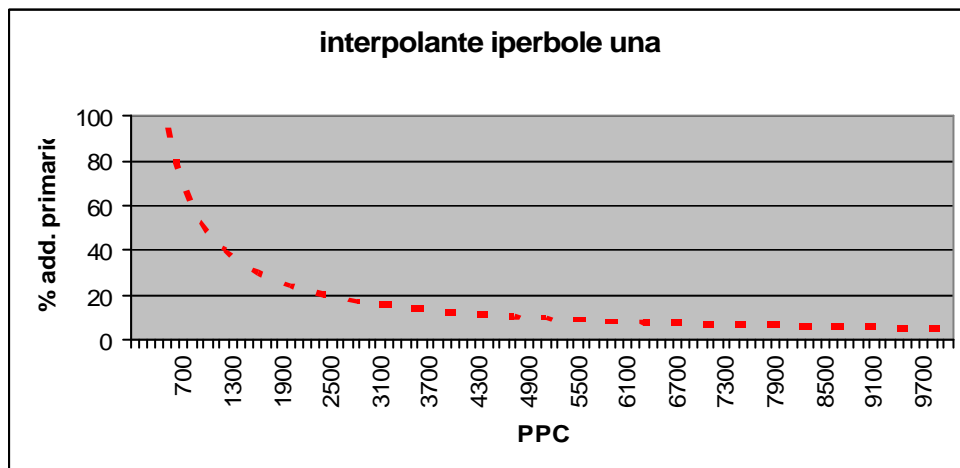
Che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.A.1



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 2.A.2



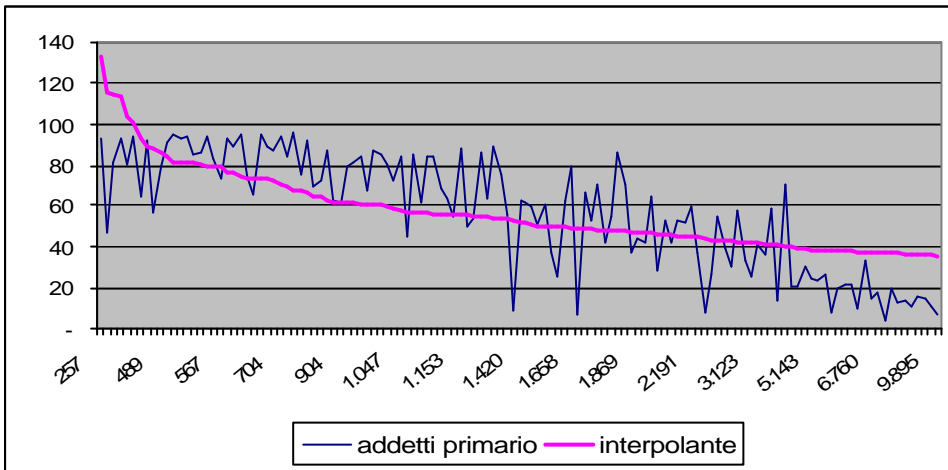
3) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = a + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 33,69290689 + \frac{25472,29251}{x}$ che

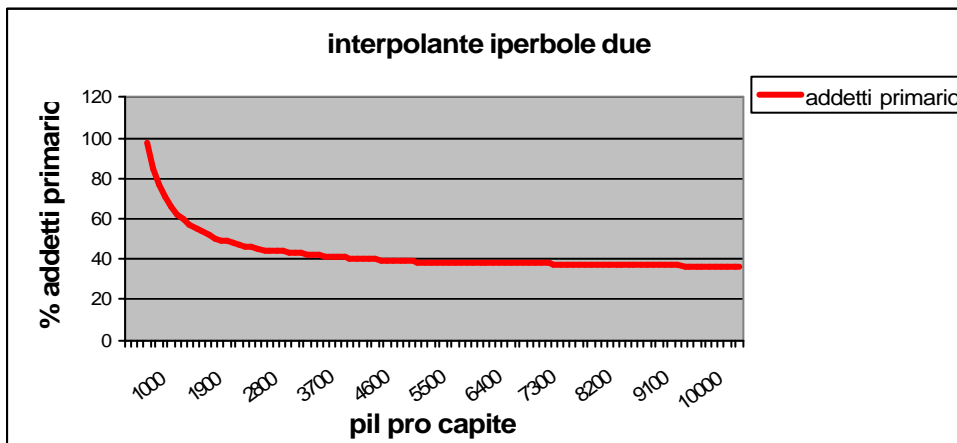
ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.A.3



che nella scala monometrica diventa

Figura 2.A.4



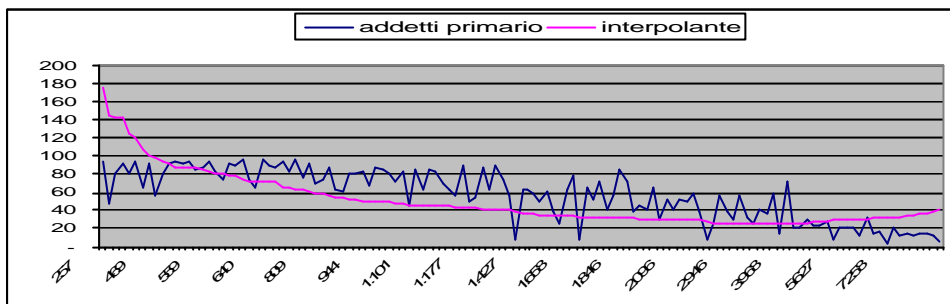
4) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 0,003722574 * x + \frac{44900,743}{x}$

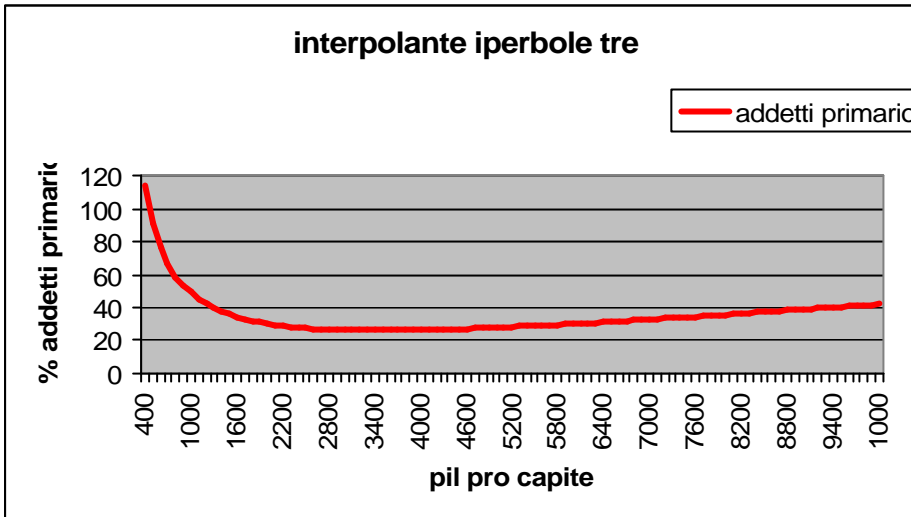
Che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.A.5



che, nella scala monometrica diventa

Figura 2.A.6



5) **INTERPOLAZIONE CON UNA ESPONENZIALE NEGATIVA del tipo**

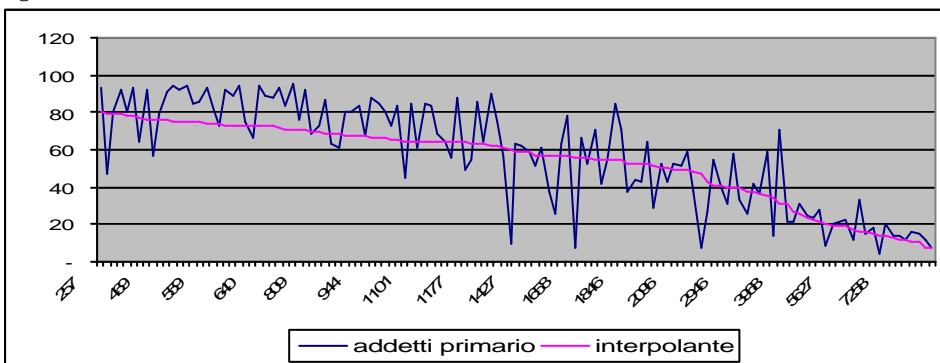
$$y = A * e^{Kx}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo l'equazione interpolante

$$y = 86,07542816 * e^{-0,0002635x}$$

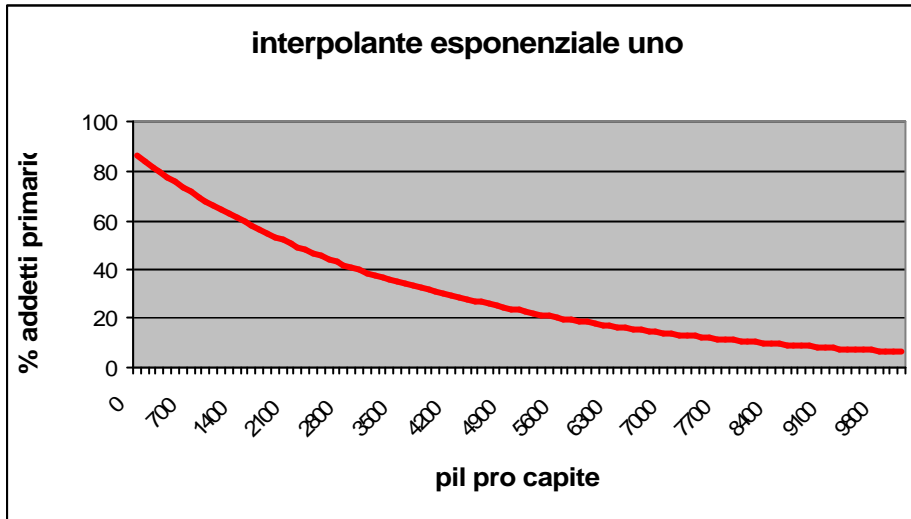
che ci permette di ottenere una curva rappresentata nelle *figure 2.A.7 e 2.A.8*

Figura 2.A.7



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 2.A.8



Utilizzando il test *chi - quadro* (χ^2) come indice di adattamento delle interpolazioni si è pervenuto al risultato che la curva che meglio si adatta ai dati posseduti è la curva *esponenziale negativa* del tipo

$$y = A e^{-kx}$$

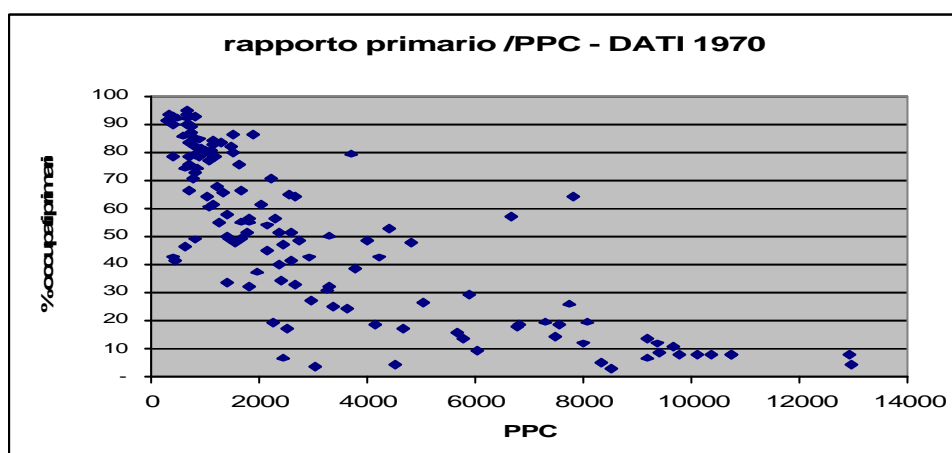
<i>Interpolante</i>	<i>Tipo di equazione</i>	<i>Equazione</i>	$c^2 = \sum \frac{(y - y^*)^2}{y^*}$
<i>Iperbole Una</i>	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{47591,8526}{x}$	3059,504393
<i>Iperbole Due</i>	$y = a + \frac{b}{x}$	$y = 33,69290689 + \frac{25472,29251}{x}$	933,2099605
<i>Iperbole Tre</i>	$y = ax + \frac{b}{x}$	$y = 0,003722574 * x + \frac{44900,743}{x}$	1848,684028
<i>Esponenziale negativa</i>	$y = A * e^{Kx}$	$y = 86,07542816 * e^{-0,000263 * x}$	584,3253434

VERIFICA CON I DATI DEL 1970.

2) Rappresentazione dei dati

I dati della tabella sono stati riportati in un grafico, ponendo :

- sull'asse delle ascisse il pil pro capite;
- sull'asse delle ordinate il valore percentuale degli addetti al primario.



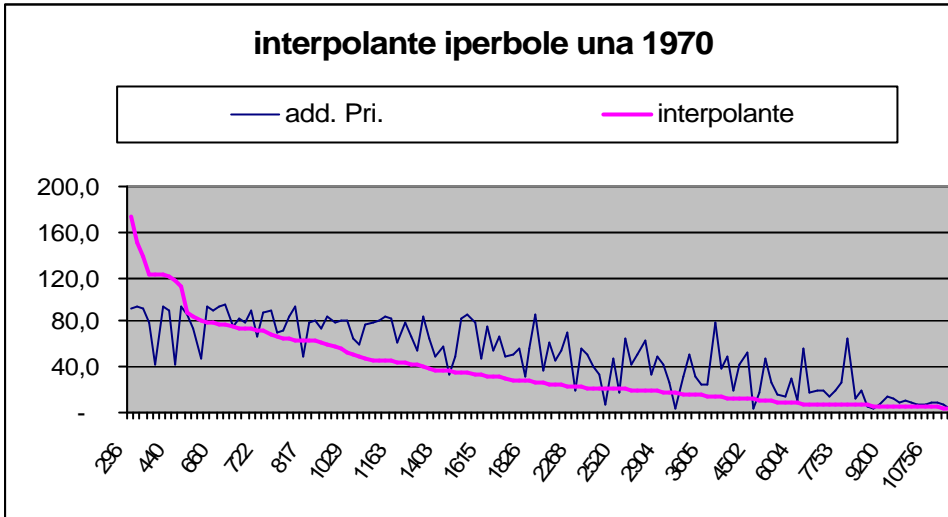
2) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = \frac{a}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = \frac{47591,8526}{x}$

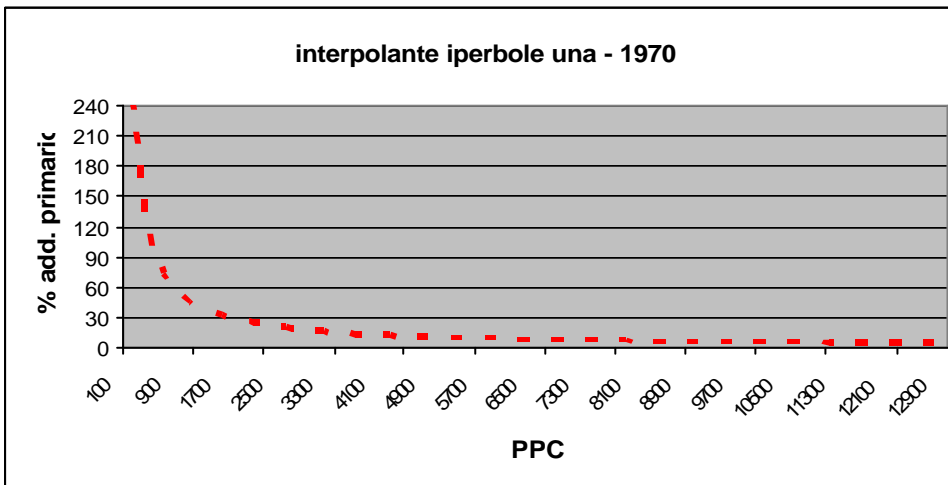
Che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.B.1



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 2.B.2



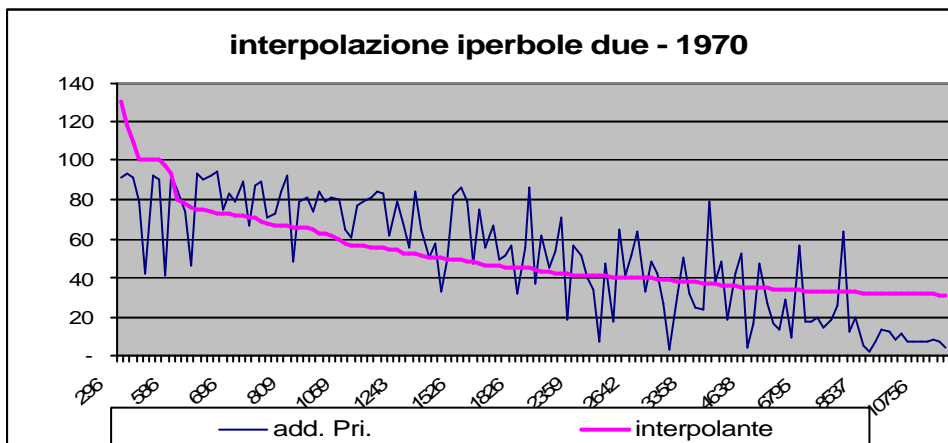
3) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = a + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 33,69290689 + \frac{25472,29251}{x}$

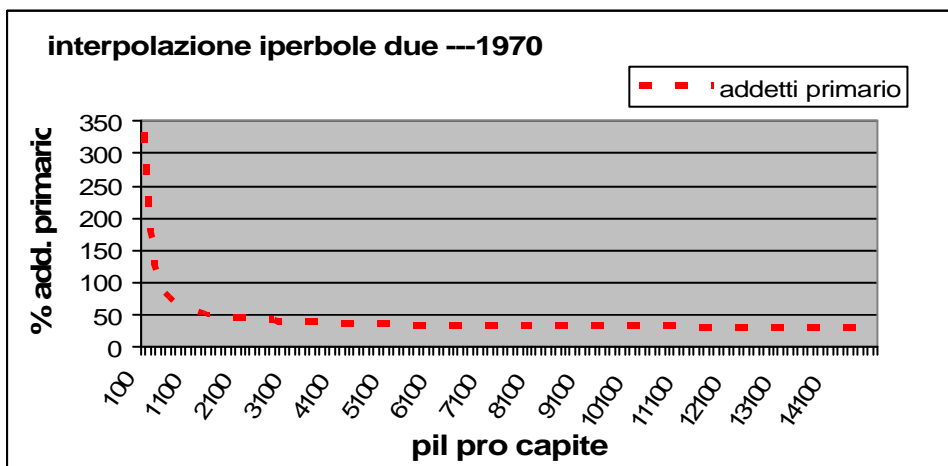
che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.B.3



che nella scala monometrica diventa

Figura 2.B.4



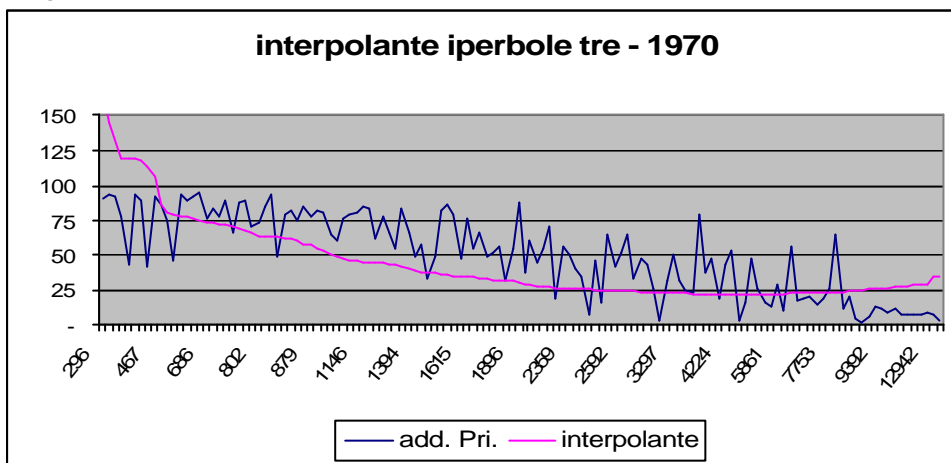
4) **INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo**

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 0,003722574 * x + \frac{44900,743}{x}$

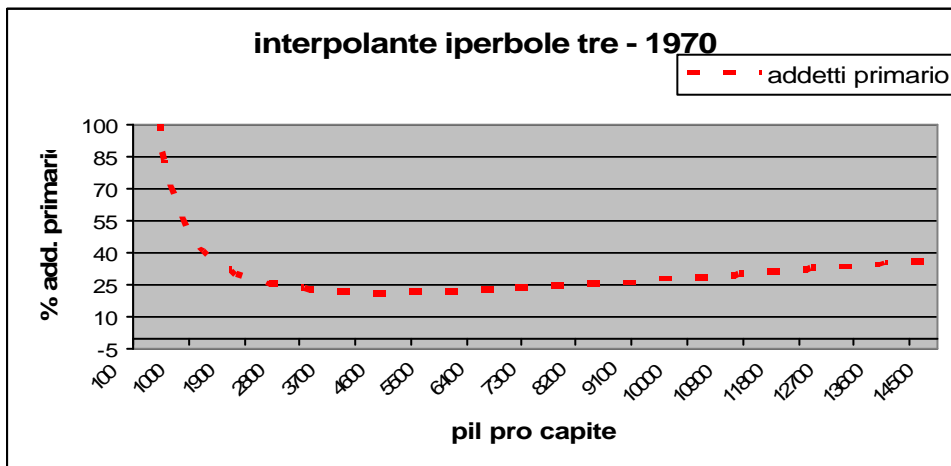
Che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.B.5



che, nella scala mono metrica diventa :

Figura 2.B.6.



5) **INTERPOLAZIONE CON UNA ESPONENZIALE NEGATIVA del tipo**

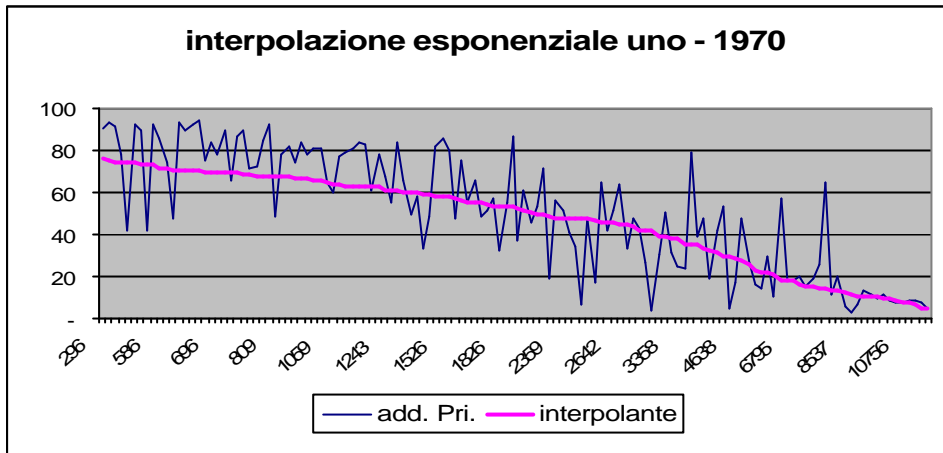
$$y = A * e^{Kx}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo l'equazione interpolante

$$y = 86,07542816 * e^{-0,0002635x}$$

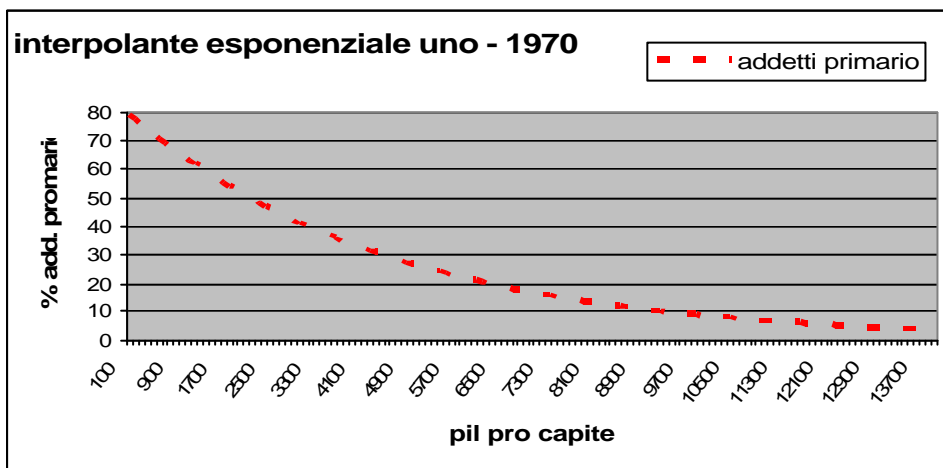
che ci permette di ottenere una curva rappresentata nelle figure 2.A.7 e 2.A.8

Figura 2.B.7



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 2.B.8



Utilizzando il test *chi – quadro* (χ^2) come indice di adattamento delle interpolazioni si è pervenuto al risultato che la curva che meglio si adatta ai dati posseduti è la curva *esponenziale negativa* del tipo

$$y = A e^{-kx}$$

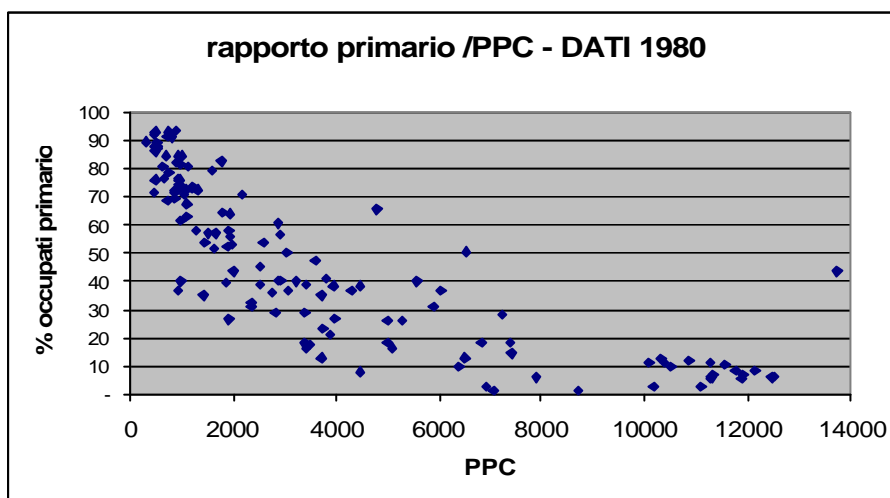
<i>Interpolante</i>	<i>Tipo di equazione</i>	<i>Equazione</i>	$c^2 = \sum \frac{(y - y^*)^2}{y^*}$
<i>Iperbole Una</i>	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{51516,51}{x}$	3940,599391
<i>Iperbole Due</i>	$y = a + \frac{b}{x}$	$y = 28,74326479 + \frac{30172,62245}{x}$	1127,448998
<i>Iperbole Tre</i>	$y = ax + \frac{b}{x}$	$y = 0,002287532 * x + \frac{49205,82378}{x}$	2199,169358
<i>Esponenziale negativa</i>	$y = A * e^{Kx}$	$y = 81,4281694 * e^{-0,002277 * x}$	898,5946591

VERIFICA CON I DATI DEL 1980.

3) Rappresentazione dei dati

I dati della tabella sono stati riportati in un grafico, ponendo :

- sull'asse delle ascisse il pil pro capite;
- sull'asse delle ordinate il valore percentuale degli addetti al primario.



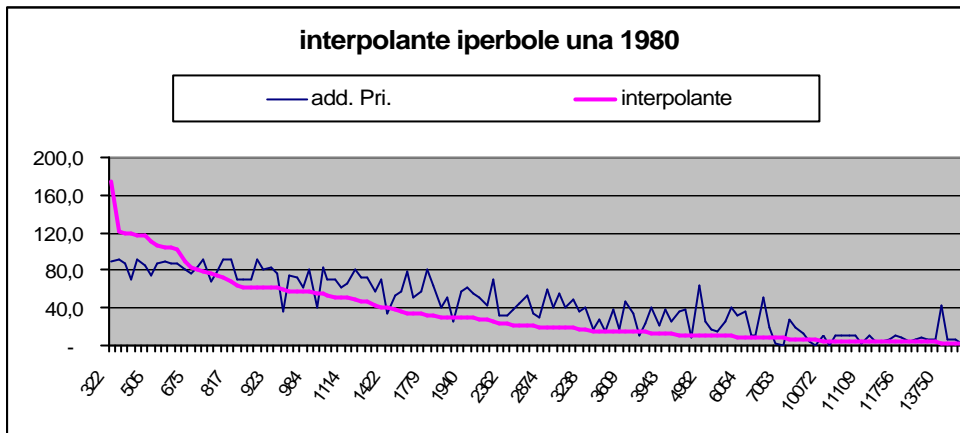
2) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = \frac{a}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = \frac{56379,958}{x}$

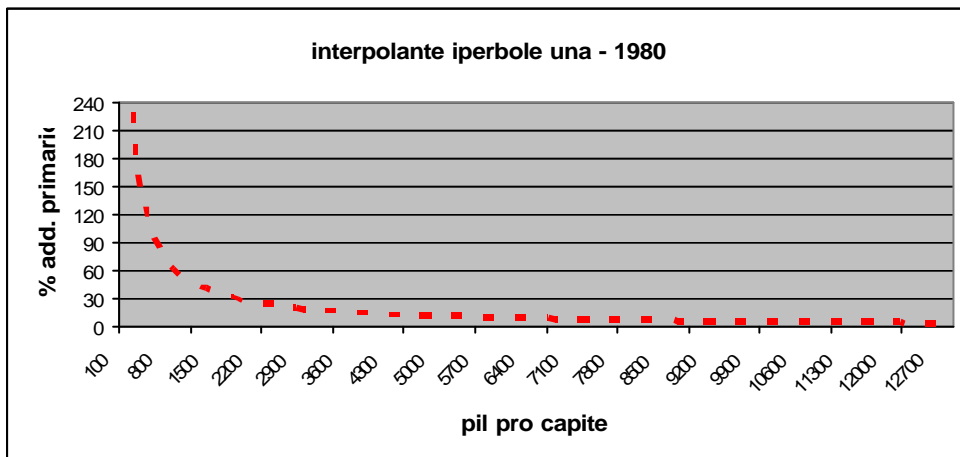
Che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.C.1



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 2.C.2



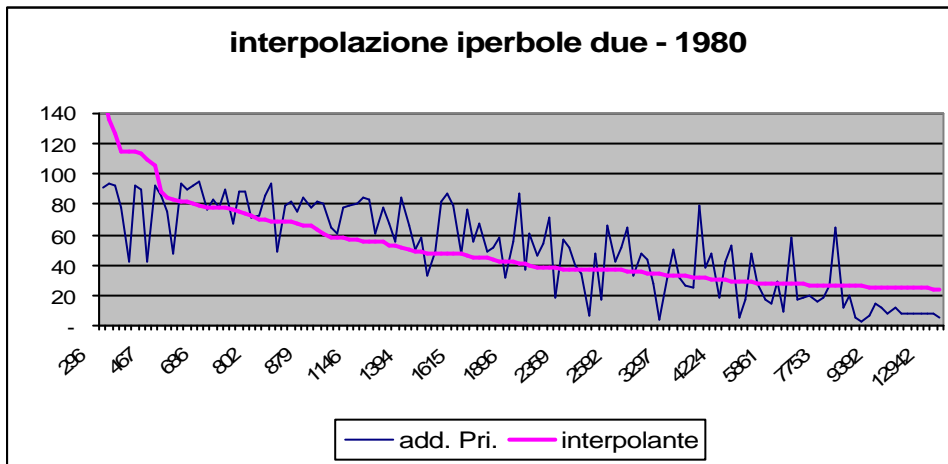
3) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = a + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 20,68135674 + \frac{39206,57806}{x}$ che

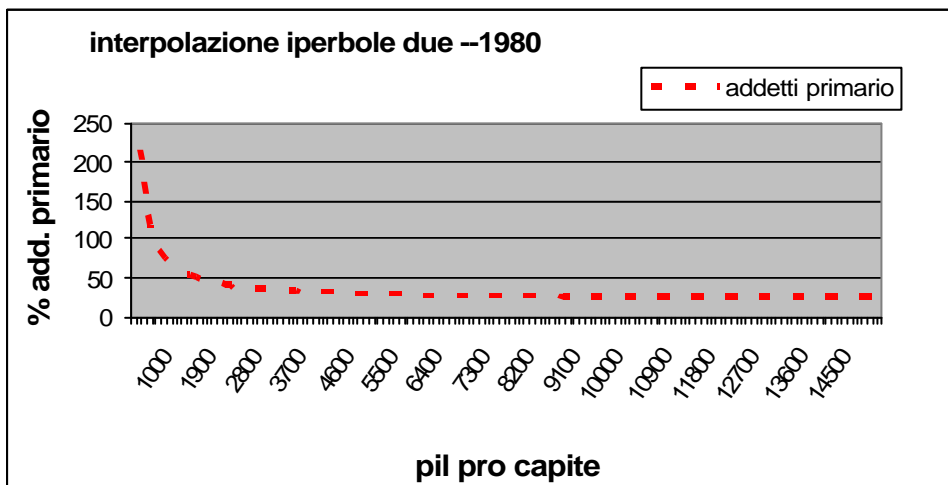
ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.C.3



che nella scala monometrica diventa

Figura 2.C.4



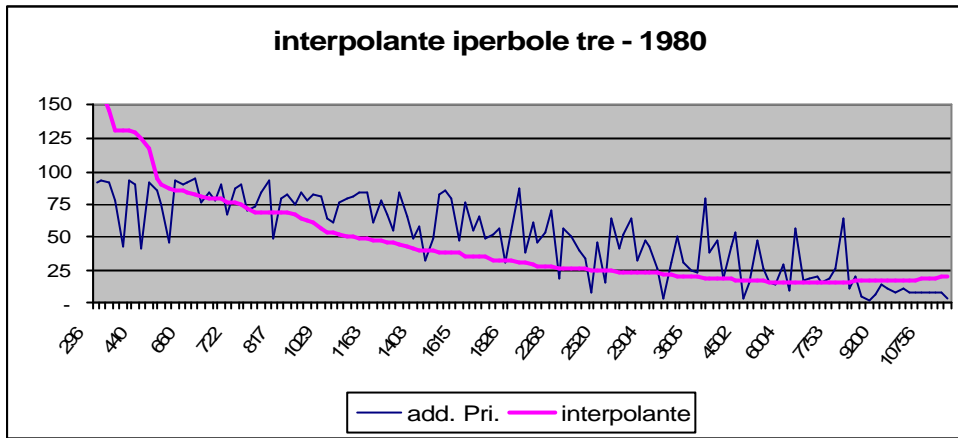
4) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 0,001269975 * x + \frac{54684,83113}{x}$

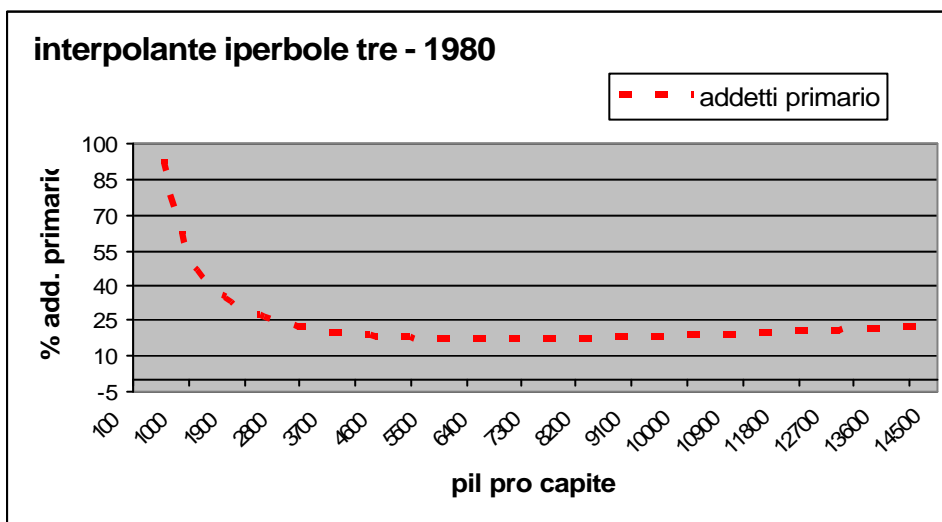
che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.C.5



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 2.C.6.



5) INTERPOLAZIONE CON UNA ESPONENZIALE NEGATIVA del tipo

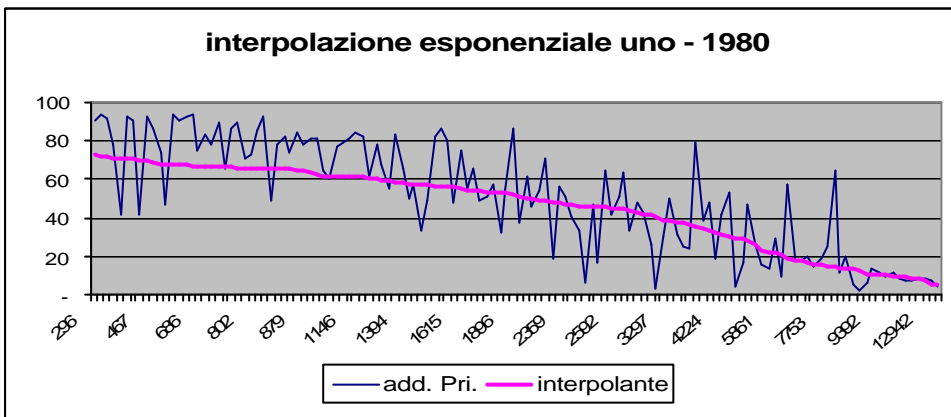
$$y = A * e^{Kx}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo l'equazione interpolante

$$y = 77,57630541 * e^{-0,000212773x}$$

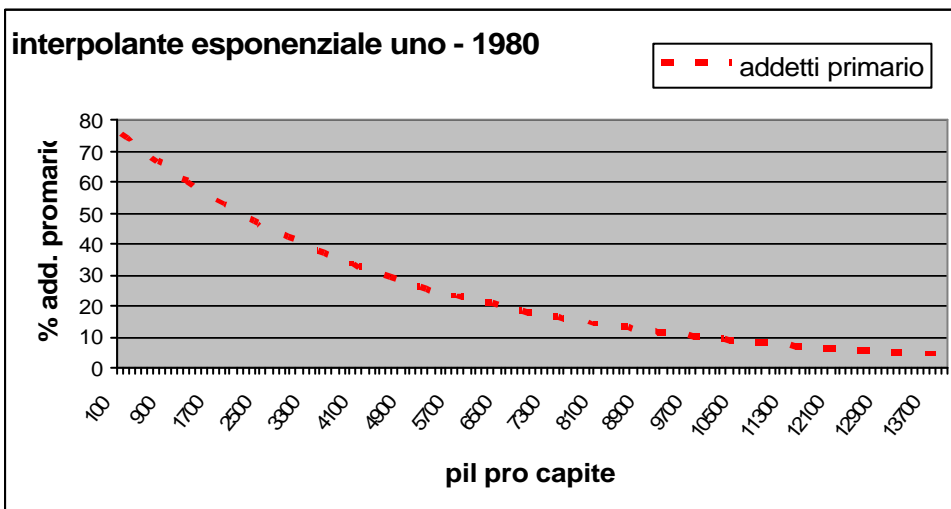
che ci permette di ottenere una curva rappresentata nelle *figure 2.A.7 e 2.A.8*

Figura 2.C.7



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 2.C.8



Utilizzando il test *chi - quadro* (χ^2) come indice di adattamento delle interpolazioni si è pervenuto al risultato che la curva che meglio si adatta ai dati posseduti è la curva *esponenziale negativa* del tipo

$$y = A e^{-kx}$$

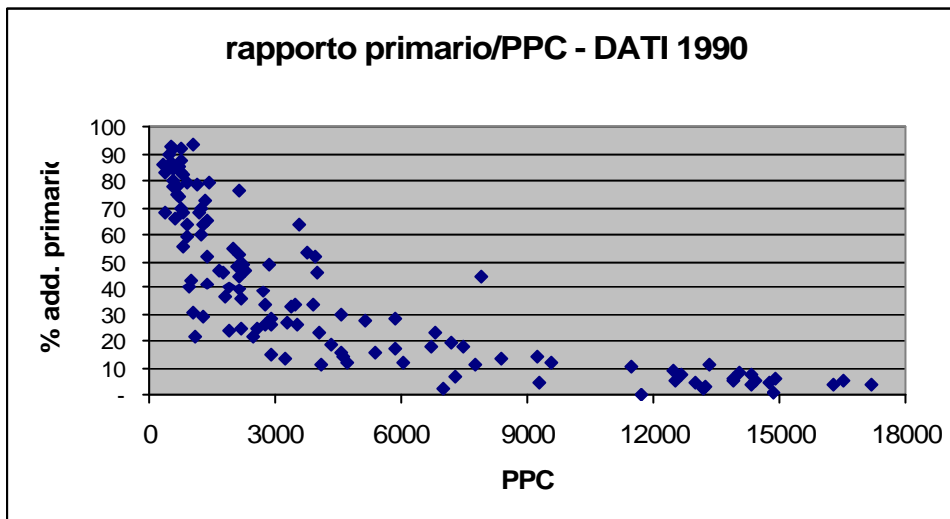
<i>Interpolante</i>	<i>Tipo di equazione</i>	<i>Equazione</i>	$c^2 = \sum \frac{(y - y^*)^2}{y^*}$
<i>Iperbole Una</i>	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{56379,958}{x}$	2751,678761
<i>Iperbole Due</i>	$y = a + \frac{b}{x}$	$y = 20,68135674 + \frac{39206,57806}{x}$	864,3610155
<i>Iperbole Tre</i>	$y = ax + \frac{b}{x}$	$y = 0,001269975 * x + \frac{54684,83113}{x}$	1167,268336
<i>Esponenziale negativa</i>	$y = A * e^{Kx}$	$y = 77,57630541 * e^{-0,000212773 * x}$	763,5047325

VERIFICA CON I DATI DEL 1990.

4) Rappresentazione dei dati

I dati della tabella sono stati riportati in un grafico, ponendo :

- sull'asse delle ascisse il pil pro capite;
- sull'asse delle ordinate il valore percentuale degli addetti al primario.



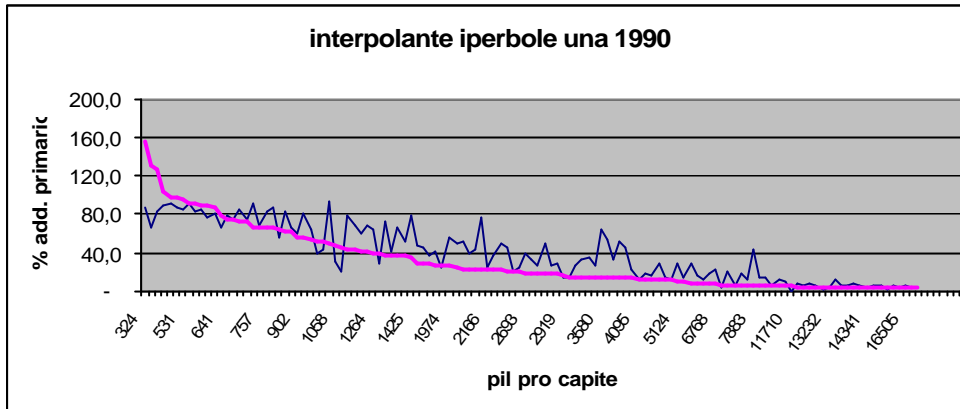
2) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = \frac{a}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = \frac{50223.5}{x}$

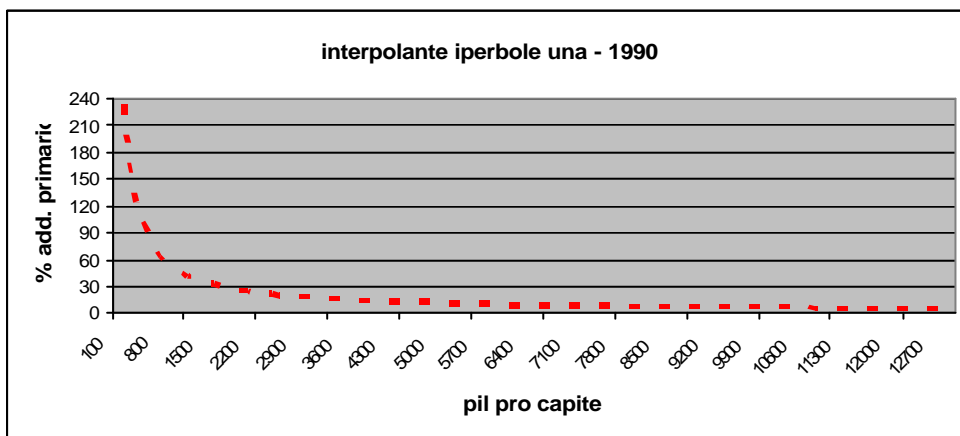
Che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.D.1



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 2.D.2



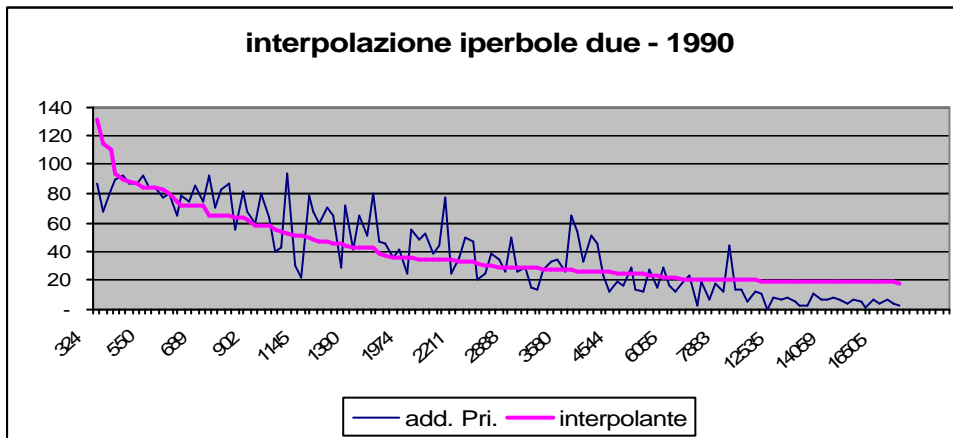
3) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = a + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 15,9284128 + \frac{37691,06299}{x}$ che

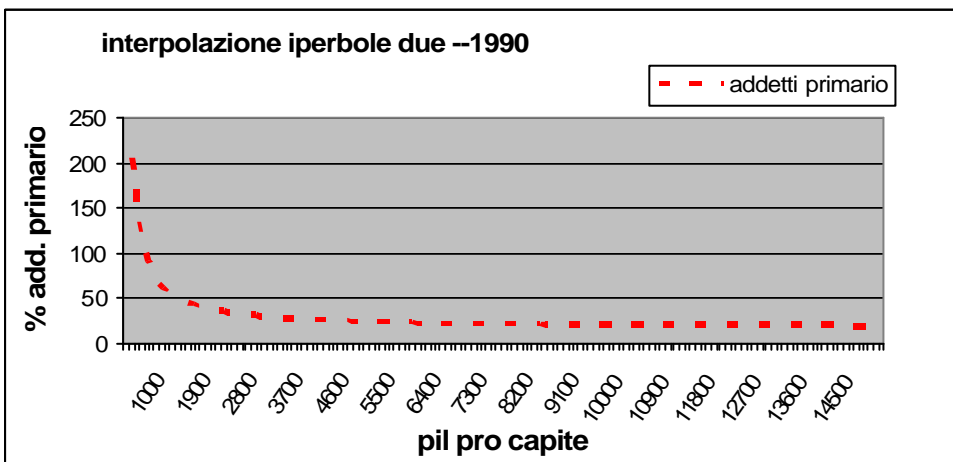
ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.D.3



che nella scala monometrica diventa

Figura 2.D.4



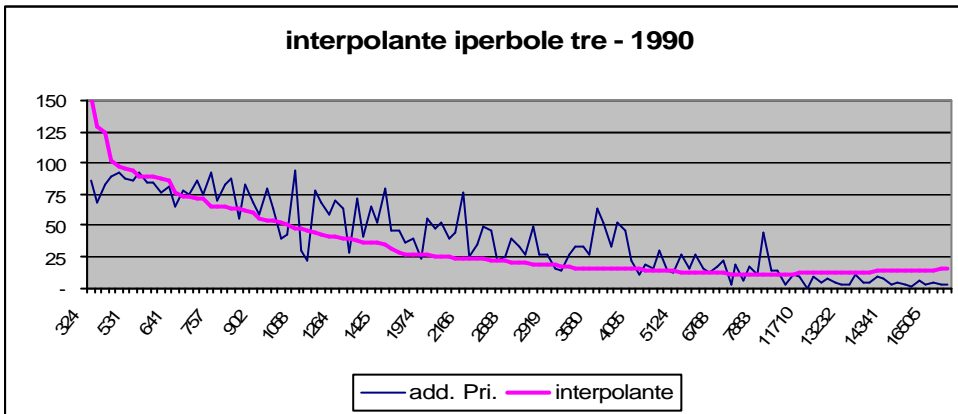
4) **INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo**

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 0,000694682 * x + \frac{49352,46739}{x}$

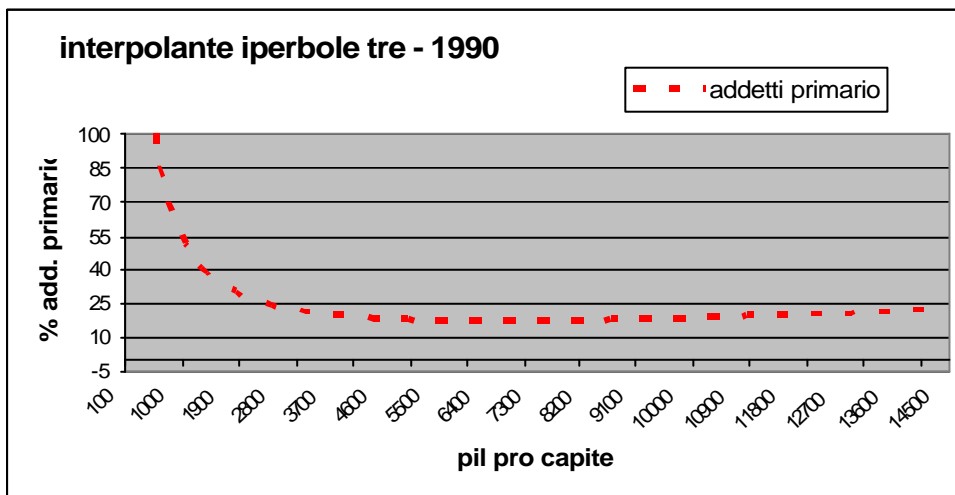
che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 2.D.5



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 2.D.6.



5) INTERPOLAZIONE CON UNA ESPONENZIALE NEGATIVA del tipo

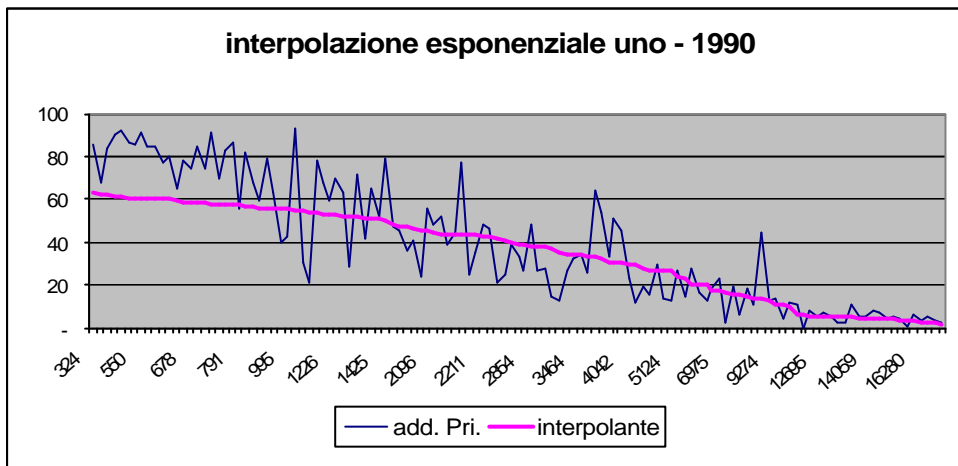
$$y = A * e^{Kx}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo l'equazione interpolante

$$y = 67,35097805 * e^{-0,000199918x}$$

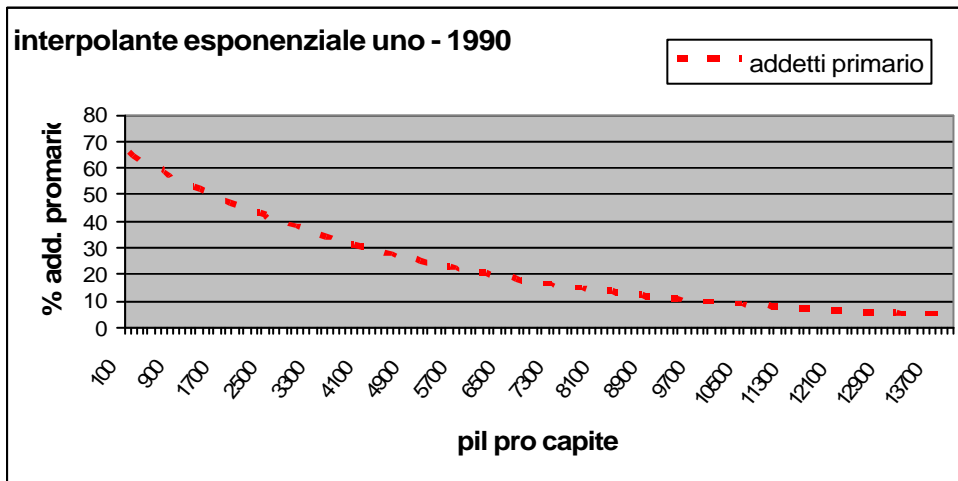
che ci permette di ottenere una curva rappresentata nelle *figure 2.A.7 e 2.A.8*

Figura 2.D.7



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 2.D.8



Utilizzando il test *chi - quadro* (χ^2) come indice di adattamento delle interpolazioni si è pervenuto al risultato che la curva che meglio si adatta ai dati posseduti è la curva *esponenziale negativa* del tipo

$$y = A e^{-kx}$$

<i>Interpolante</i>	<i>Tipo di equazione</i>	<i>Equazione</i>	$c^2 = \sum \frac{(y - y^*)^2}{y^*}$
<i>Iperbole Una</i>	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{50223,5}{x}$	2004,769892
<i>Iperbole Due</i>	$y = a + \frac{b}{x}$	$y = 15,9284128 + \frac{37691,06299}{x}$	880,0452802
<i>Iperbole Tre</i>	$y = ax + \frac{b}{x}$	$y = 0,000694682 * x + \frac{49352,46739}{x}$	1531,311892
<i>Esponenziale negativa</i>	$y = A * e^{Kx}$	$y = 67,35097805 * e^{-0,000199918 * x}$	706,2512257

Pil pro capita e popolazione attiva addetta al primario

World Bank list of economies (July 2002) dati 2001							
		milioni	milioni \$ US	\$ US			
	Economy	Pop.	Pil	Pil pro capite	prim	sec	terz
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Afghanistan	27,2	7616	280	67	7	26
2	Albania	3,4	4200	1235,294118	50	29	21
3	Algeria	30,9	50400	1631,067961	16	24	60
4	Andorra	0,067	1500	22388,0597	1	20	79
5	Angola	13,5	6700	496,2962963	68	11	21
6	Antigua and Barbuda	0,0685	621,5	9072,992701	4	17	79
7	Argentina	37,5	261000	6960	12	31	57
8	Armenia	3,8	2100	552,6315789	42	20	38
9	Australia	19,4	383300	19757,73196	5	22	73
10	Austria	8,1	194500	24012,34568	6	30	64
11	Azerbaijan	8,1	5300	654,3209877	23	11	66
12	Bahrain	0,714	8000	11204,48179	2	25	73
13	Bangladesh	133,4	49900	374,0629685	59	10	31
14	Barbados	0,2682	2500	9321,401939	4	22	74
15	Belarus	10	11900	1190	16	35	49
16	Belgium	10,3	239800	23281,5534	2	26	72
17	Benin	6,4	2300	359,375	57	11	32
18	Bhutan	8,5	8000	941,1764706	94	1	5
19	Bolivia	4,1	5000	1219,512195	44	18	38
20	Bosnia and Herzegovina	1,6	5900	3687,5	14	21	65
21	Botswana	172,6	528500	3061,993048	16	26	58
22	Brazil	0,3454	10269	29730,74696	24	20	56
23	Brunei	8,1	12600	1555,555556	2	21	77
24	Bulgaria	11,6	2400	206,8965517	27	29	44
25	Burkina Faso	6,9	692,3	100,3333333	92	2	6
26	Burundi	12,3	3300	268,2926829	93	2	5
27	Cambodia	15,2	8700	572,3684211	77	4	19
28	Cameroon	31	661900	21351,6129	63	7	30
29	Canada	0,4539	596,4	1313,945803	3	23	74
30	Cape Verde	0,035	46,55	1330	25	25	50
31	Cayman Islands	3,8	1000	263,1578947	5	40	55
32	Central African Republic	7,9	1600	202,5316456	80	4	16
33	Chad	0,149	31,29	210	83	2	15
34	Chile	15,4	66900	4344,155844	14	23	63
35	China	1300	1180000	907,6923077	54	20	26
36	Colombia	43	82000	1906,976744	22	20	58
37	Comoros	0,5719	216,8	379,087253	77	9	14
38	Congo, Dem. Rep.	52,4	5800	110,6870229	65	16	19
39	Congo, Rep.	3,1	2200	709,6774194	44	13	43
40	Costa Rica	3,9	15300	3923,076923	20	22	58

41	Côte d'Ivoire	16,4	10300	628,0487805	51	12	37
42	Croatia	4,4	20400	4636,363636	15	29	56
43	Cuba	11,2	19200	1714,285714	18	30	52
44	Cyprus	0,7607	9400	12357,03957	9	22	69
45	Czech Republic	10,3	54100	5252,427184	5	40	55
46	Denmark	5,4	166300	30796,2963	4	26	70
47	Dominica	0,0732	223,6	3054,686539	24	18	58
48	Dominican Republic	8,5	19000	2235,294118	20	25	55
49	Ecuador	12,9	16000	1240,310078	31	18	51
50	Egypt, Arab Rep.	62,2	99400	1598,07074	28	22	50
51	El Salvador	6,4	13100	2046,875	22	25	53
52	Equatorial Guinea	0,4691	327,1	697,2926881	75	5	20
53	Estonia	1,4	5300	3785,714286	7	27	66
54	Ethiopia	65,8	6800	103,343465	86	2	12
55	Fiji	0,8235	1800	2185,79235	41	31	28
56	Finland	5,2	124200	23884,61538	6	27	67
57	France	59,2	1400000	23648,64865	4	25	71
58	Gabon	1,3	4000	3076,923077	42	12	46
59	Gambia, The	1,3	439,8	338,3076923	73	10	17
60	Georgia	5	3100	620	52	10	38
61	Germany	82,2	1950000	23722,62774	3	33	64
62	Ghana	19,7	5700	289,3401015	59	13	28
63	Greece	10,6	124600	11754,71698	17	22	61
64	Grenada	0,099	368,2	3719,191919	14	24	62
65	Guatemala	11,7	19600	1675,213675	58	18	24
66	Guinea	7,6	3000	394,7368421	71	2	27
67	Guinea-Bissau	1,2	201,9	168,25	77	5	18
68	Guyana	0,766	640,7	836,4229765	22	25	53
69	Haiti	8,1	3900	481,4814815	57	9	34
70	Honduras	6,6	5950	901,5151515	35	22	43
71	Hungary	10,2	48900	4794,117647	6	34	60
72	Iceland	0,284	8200	28873,23944	8	23	69
73	India	1000	474300	474,3	60	19	21
74	Indonesia	213,6	144700	677,4344569	43	18	39
75	Iran, Islamic Rep.	64,7	112900	1744,976816	23	31	46
76	Iraq	23,8	14200	596,6386555	16	18	66
77	Ireland	3,8	88400	23263,15789	8	28	64
78	Israel	6,4	110000	17187,5	2	24	74
79	Italy	57,7	1125000	19497,40035	5	32	63
80	Jamaica	2,7	7300	2703,703704	21	18	61
81	Japan	127,1	4600000	36191,97482	5	31	64
82	Jordan	5	8800	1760	6	22	72
83	Kazakhstan	14,8	20100	1358,108108	22	18	60
84	Kenya	30,7	10300	335,504886	75	10	15
85	Kiribati	0,0929	77,2	831,2784675	71	3	26
86	Korea, Dem. Rep.	22,4	13000	580,3571429	38	31	31
87	Korea, Rep.	47,6	447700	9405,462185	11	28	61
88	Kuwait	2	36000	18000	2	23	75
89	Kyrgyz Republic	5	1400	280	52	12	36
90	Lao PDR	5,4	1666	308,5185185	77	7	16
91	Latvia	2,3	7700	3347,826087	14	26	60
92	Lebanon	4,4	17600	4000	14	27	59
93	Lesotho	2,1	1160	552,3809524	39	29	32

94	Liberia	3,2	1570	490,625	68	8	24
95	Libya	5,4	30000	5555,555556	18	30	52
96	Liechtenstein	0,032	750	23437,5	2	36	62
97	Lithuania	3,5	11400	3257,142857	20	27	53
98	Luxembourg	0,444	18600	41891,89189	2	23	75
99	Macedonia, FYR	2	3400	1700	20	33	47
100	Madagascar	16	4200	262,5	82	5	13
101	Malawi	10,5	1800	171,4285714	84	5	11
102	Malaysia	23,8	86500	3634,453782	18	32	50
103	Maldives	0,282	578	2049,64539	14	19	67
104	Mali	11,1	2300	207,2072072	83	6	11
105	Malta	0,392	3600	9183,673469	2	26	72
106	Marshall Islands	0,0525	114,9	2188,571429	16	14	70
107	Mauritania	2,8	974	347,8571429	62	12	26
108	Mauritius	1,2	4600	3833,333333	12	38	50
109	Mexico	99,4	550500	5538,229376	18	27	55
110	Micronesia, Fed. Sts.	0,12	258,1	2150,833333	27	7	66
111	Moldova	4,3	1600	372,0930233	51	14	35
112	Mongolia	2,4	962,3	400,9583333	49	16	35
113	Morocco	29,2	34600	1184,931507	40	23	37
114	Mozambique	18,1	3700	204,4198895	81	6	13
115	Myanmar	48,3	126500	2619,047619	66	12	22
116	Namibia	1,8	3500	1944,444444	48	15	37
117	Nepal	23,6	5900	250	81	3	16
118	Netherlands	16	385400	24087,5	3	21	76
119	New Zealand	3,8	47600	12526,31579	9	23	68
120	Nicaragua	5,2	2308	443,8461538	43	15	42
121	Niger	11,2	2000	178,5714286	89	4	7
122	Nigeria	129,9	37100	285,604311	43	7	50
123	Norway	4,5	160600	35688,88889	4	22	74
124	Oman	2,5	15700	6280	9	32	59
125	Pakistan	141,5	59600	421,2014134	44	19	37
126	Palau	0,0195	131,2	6728,205128	9	14	77
127	Panama	2,9	9500	3275,862069	17	18	65
128	Papua New Guinea	5,3	3000	566,0377358	79	7	14
129	Paraguay	5,6	7300	1303,571429	32	19	49
130	Peru	26,1	52190	1999,616858	26	17	57
131	Philippines	77	80800	1049,350649	39	15	46
132	Poland	38,7	163900	4235,142119	19	31	50
133	Portugal	10,2	109200	10705,88235	13	36	51
134	Romania	22,4	38400	1714,285714	43	26	31
135	Russian Federation	144,8	253400	1750	13	30	57
136	Rwanda	8,7	1900	218,3908046	90	3	7
137	San Marino	0,027	950	35185,18519	1	40	59
138	São Tomé and Príncipe	0,151	42,8	283,4437086	40	16	44
139	Saudi Arabia	21,4	156645,5	7319,883178	12	25	63
140	Senegal	9,8	4700	479,5918367	65	8	27
141	Seychelles	0,0824	581	7049,687557	8	24	68
142	Sierra Leone	5,1	725,9	142,3333333	64	18	18
143	Singapore	4,1	106000	25853,65854	0	34	66
144	Slovak Republic	5,4	20000	3703,703704	7	39	54
145	Slovenia	2	19400	9700	11	38	51

146	Solomon Islands	0,432	252,6	584,7222222	27	14	59
147	Somalia	9,1	1000	109,8901099	71	10	19
148	South Africa	43,2	125500	2905,092593	11	25	64
149	Spain	39,5	586900	14858,22785	7	31	62
150	Sri Lanka	19,6	16300	831,6326531	36	23	41
151	Sudan	31,7	10300	324,9211356	69	8	23
152	Suriname	0,4197	709,4	1690,254944	8	36	56
153	Swaziland	1,1	1450	1318,181818	39	22	39
154	Sweden	8,9	225900	25382,02247	2	25	73
155	Switzerland	7,2	266500	37013,88889	4	26	70
156	Syrian Arab Republic	16,6	16600	1000	28	27	45
157	Taiwan	22,35	320000	14317,67338	8	37	55
158	Tajikistan	6,2	1100	177,4193548	65	11	24
159	Tanzania	34,5	9200	266,6666667	80	5	15
160	Thailand	61,2	120900	1975,490196	49	19	32
161	Togo	4,7	1300	276,5957447	68	12	20
162	Trinidad and Tobago	1,3	7200	5538,461538	9	34	57
163	Tunisia	9,7	20100	2072,164948	22	34	44
164	Turkey	66,2	168300	2542,296073	46	21	33
165	Turkmenistan	5,3	5200	981,1320755	49	18	33
166	Uganda	22,8	6300	276,3157895	80	6	14
167	Ukraine	49,1	35200	716,904277	26	26	48
168	United Arab Emirates	3	61000	20333,33333	8	33	59
169	United Kingdom	59,9	1500000	25041,73623	2	22	76
170	United States	284	9904500	34875	3	23	74
171	Uruguay	3,4	19000	5588,235294	6	25	69
172	Uzbekistan	25,1	13800	549,8007968	35	19	46
173	Venezuela, RB	24,6	117200	4764,227642	10	24	66
174	Vietnam	79,5	32600	410,0628931	69	12	19
175	Yemen, Rep.	18	8300	461,1111111	49	15	36
176	Yugoslavia, Fed. Rep.	10,6	10900	1028,301887	3	30	67
177	Zambia	10,3	3300	320,3883495	71	7	22
178	Zimbabwe	12,8	6200	484,375	25	26	49

LEGENDA.

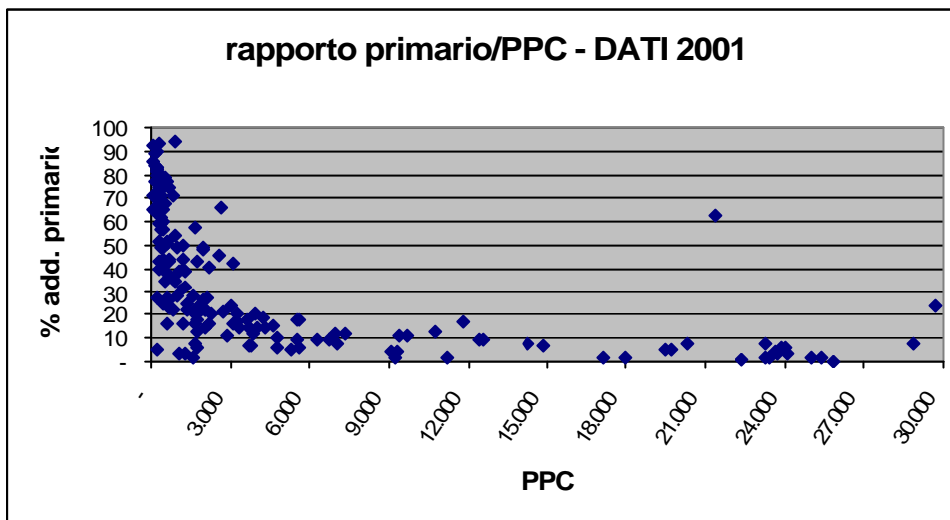
Colonna 2 : Paesi od economie
Colonna 3 : Popolazione in milioni
Colonna 4 : Pil 2001 in \$ US correnti
Colonna 5 : Pil pro capite in \$ US correnti
Colonna 6 : % addetti al settore primario
Colonna 7 : % addetti al settore secondario
Colonna 8 : % addetti al settore terziario

VERIFICA CON I DATI DEL 2001.

5) Rappresentazione dei dati

I dati della tabella sono stati riportati in un grafico, ponendo :

- sull'asse delle ascisse il pil pro capite;
- sull'asse delle ordinate il valore percentuale degli addetti al primario.



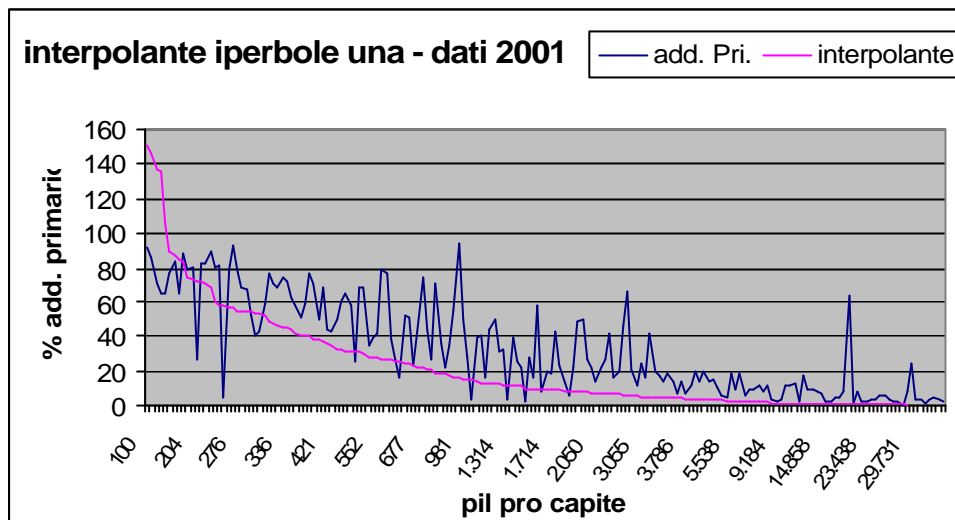
2) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = \frac{a}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = \frac{15077,99}{x}$

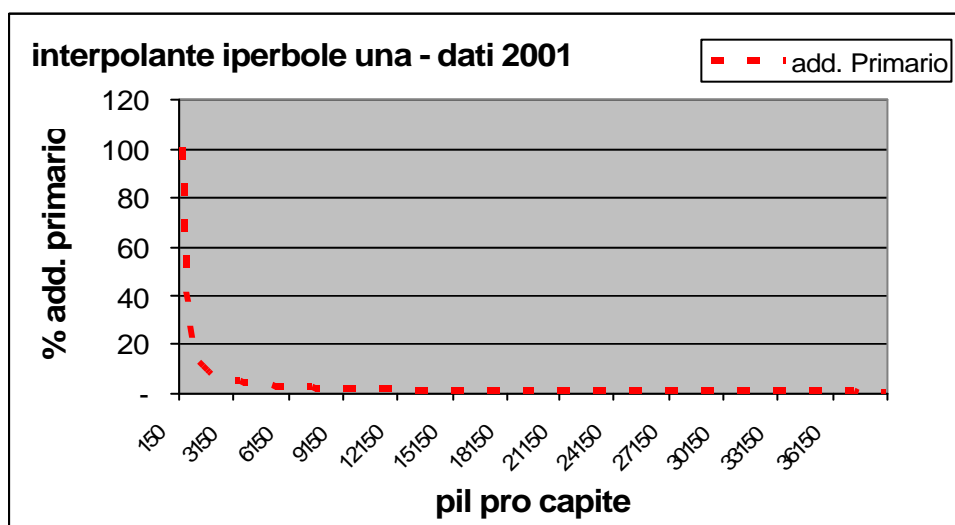
Che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 3.A.1



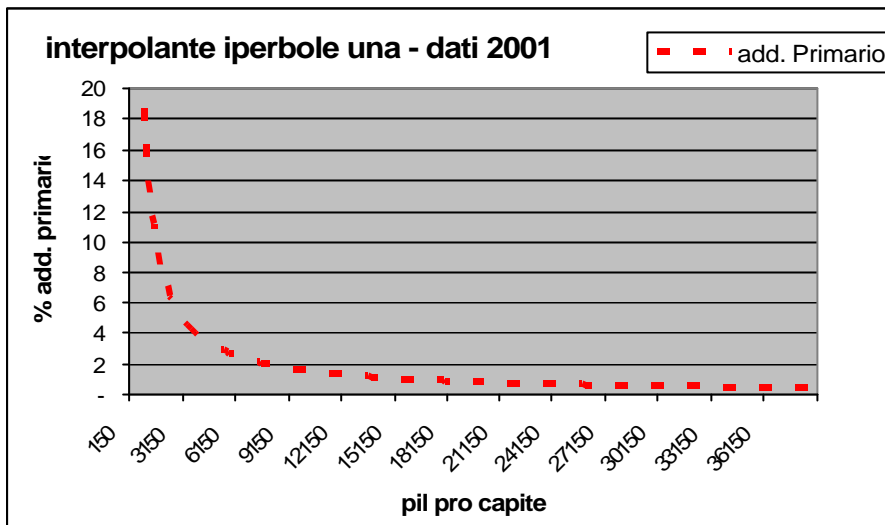
che, nella scala monometrica diventa :

Figura 3.A.2



se visualizziamo la % di addetti al primario dalla fascia che va al di sotto del 20% , otteniamo la

Figura 3.A.2bis

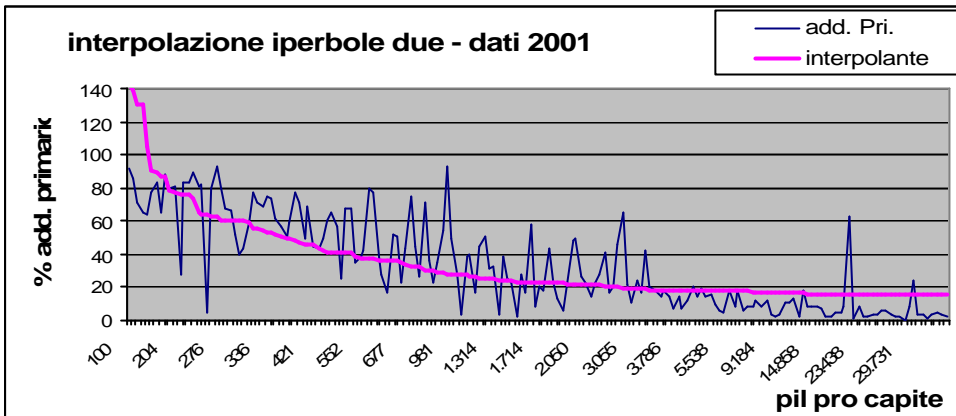


3) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = a + \frac{b}{x}$$

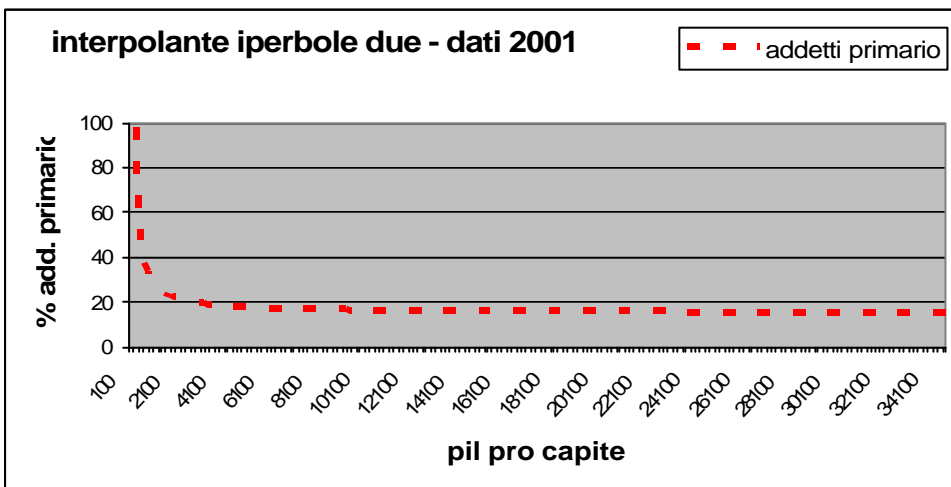
interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 14,870475538 + \frac{12800,43723}{x}$ che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 3.A.3



che nella scala monometrica diventa

Figura 3.A.4



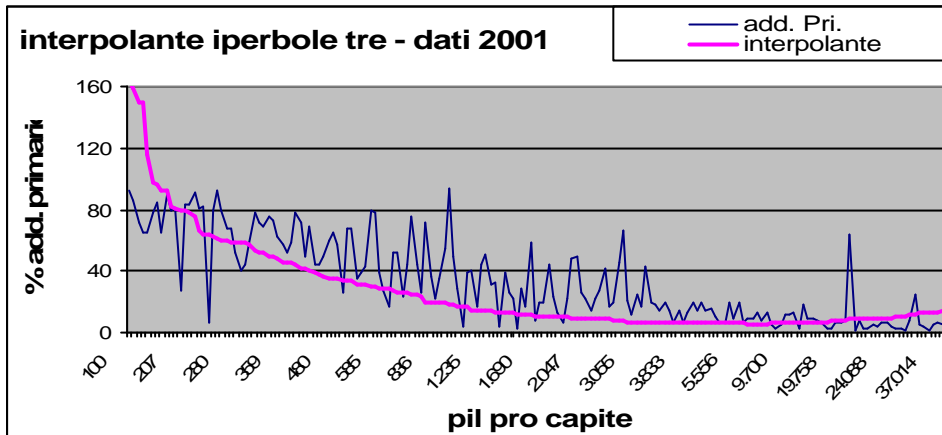
4) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 0,000355624 * x + \frac{16445,49704}{x}$

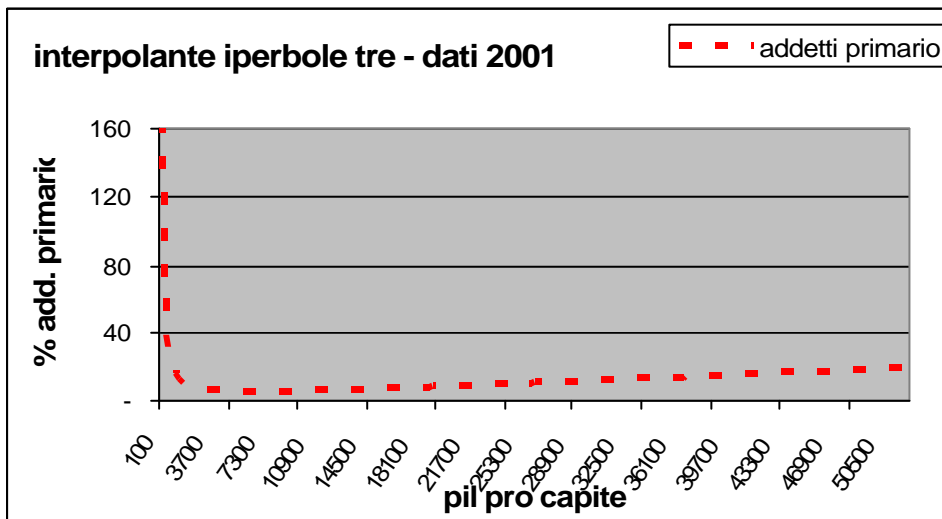
che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 3.A.5



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 3.A.6.



5) **INTERPOLAZIONE CON UNA ESPONENZIALE NEGATIVA del tipo**

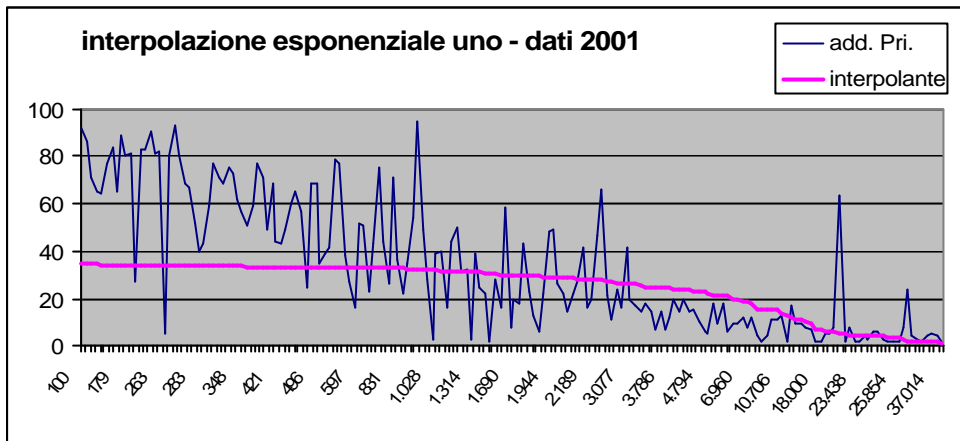
$$y = A * e^{Kx}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo l'equazione interpolante

$$y = 34,80870821 * e^{-0,00008995 * x}$$

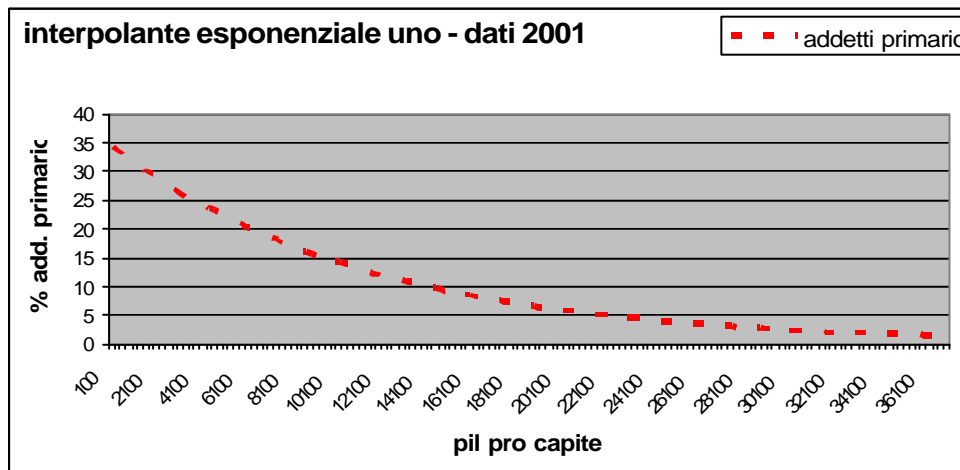
che ci permette di ottenere una curva rappresentata nelle *figure 2.A.7 e 2.A.8*

Figura 3.A.7



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 3.A.8



Utilizzando il test *chi – quadro* (χ^2) come indice di adattamento delle interpolazioni si è pervenuto al risultato che la curva che meglio si adatta ai dati posseduti è la curva *iperbole* del tipo

$$y = a + \frac{b}{x}$$

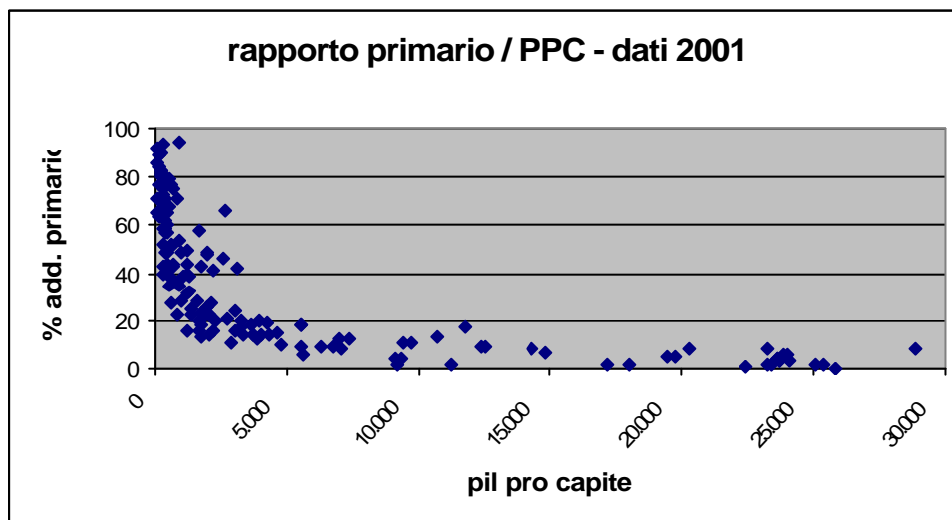
<i>Interpolante</i>	<i>Tipo di equazione</i>	<i>Equazione</i>	$c^2 = \sum \frac{(y - y^*)^2}{y^*}$
<i>Iperbole Una</i>	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{15077,99}{x}$	14181,64549
<i>Iperbole Due</i>	$y = a + \frac{b}{x}$	$y = 14,870475538 + \frac{12800,43723}{x}$	1848,061013
<i>Iperbole Tre</i>	$y = ax + \frac{b}{x}$	$y = 0,000355624 * x + \frac{16445,49704}{x}$	4145,05298
<i>Esponenziale negativa</i>	$y = A * e^{Kx}$	$y = 34,80870821 * e^{-0,00008995 * x}$	2765,329668

VERIFICA CON I DATI DEL 2001 DEPURATI

6) Rappresentazione dei dati

I dati della tabella sono stati depurati da alcuni dati anomali, anche in considerazione che l'economie in transizione presentano dei fenomeni particolari difficilmente generalizzabili e, come sempre sono riportati in un grafico, ponendo :

- sull'asse delle ascisse il pil pro capite;
- sull'asse delle ordinate il valore percentuale degli addetti al primario.



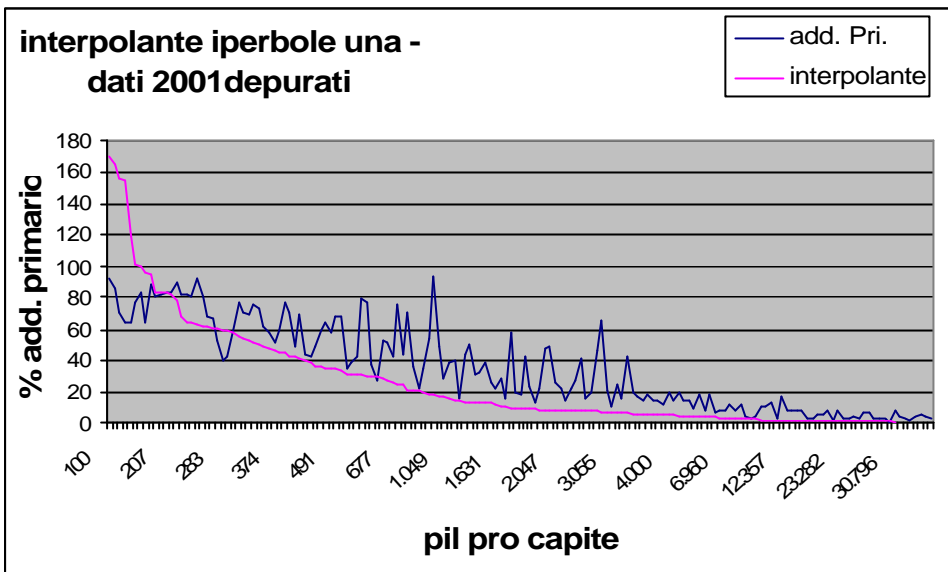
2) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = \frac{a}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = \frac{15077,99}{x}$

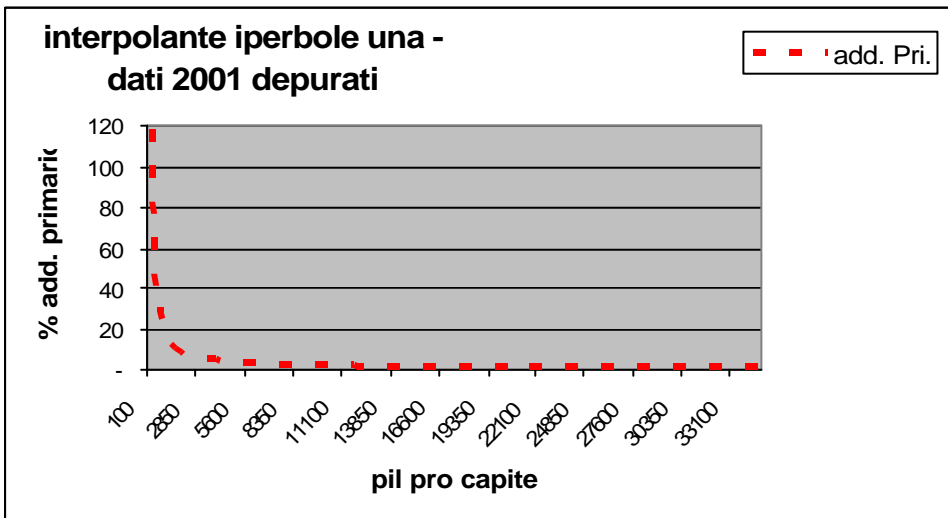
Che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 3.B.1



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 3.B.2

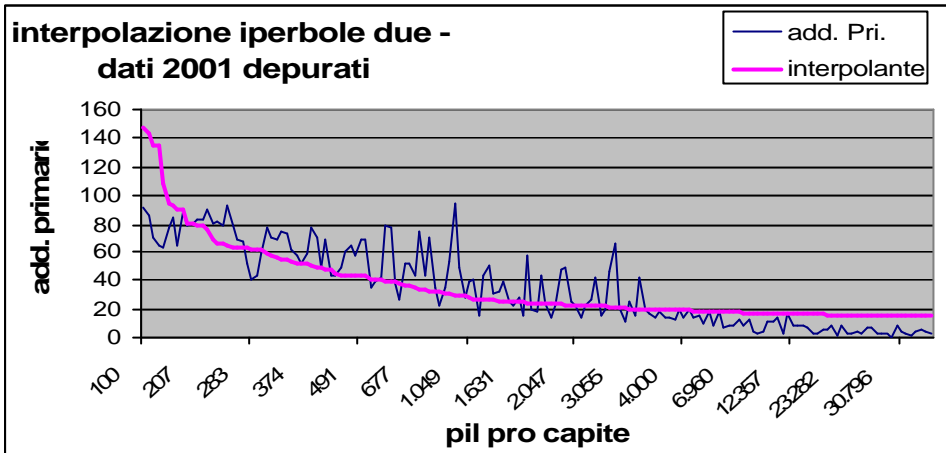


3) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = a + \frac{b}{x}$$

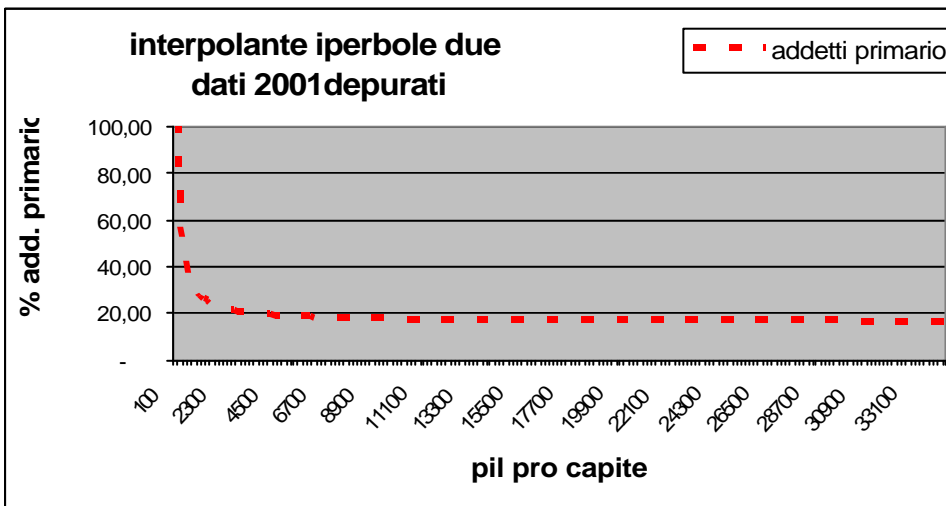
interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 14,870475538 + \frac{12800,43723}{x}$ che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 3.B.3



che nella scala monometrica diventa

Figura 3.B.4



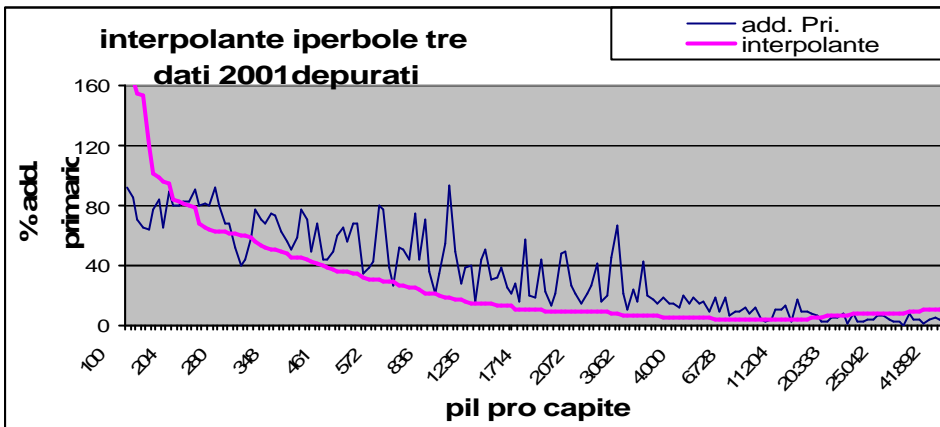
4) INTERPOLAZIONE CON UNA IPERBOLE del tipo

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo $y = 0,000355624 * x + \frac{16445,49704}{x}$

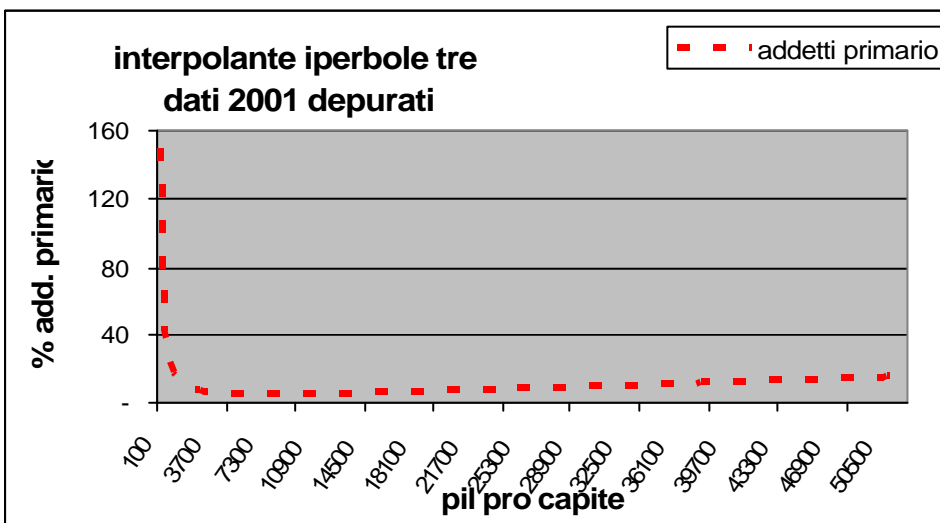
che ci permette di ottenere una curva che è rappresentata nella figura seguente

Figura 3.B.5



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 3.B.6.



5) **INTERPOLAZIONE CON UNA ESPONENZIALE NEGATIVA del tipo**

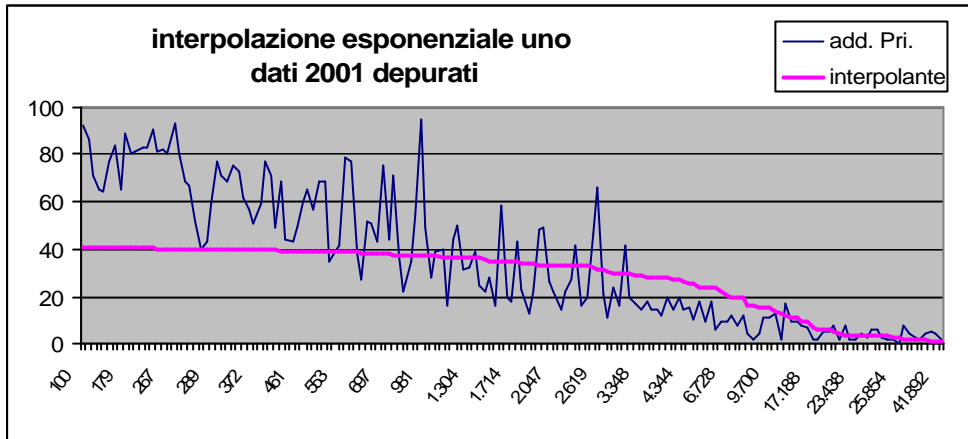
$$y = A * e^{Kx}$$

interpolando ai minimi quadrati otteniamo l'equazione interpolante

$$y = 34,80870821 * e^{-0,00008995 * x}$$

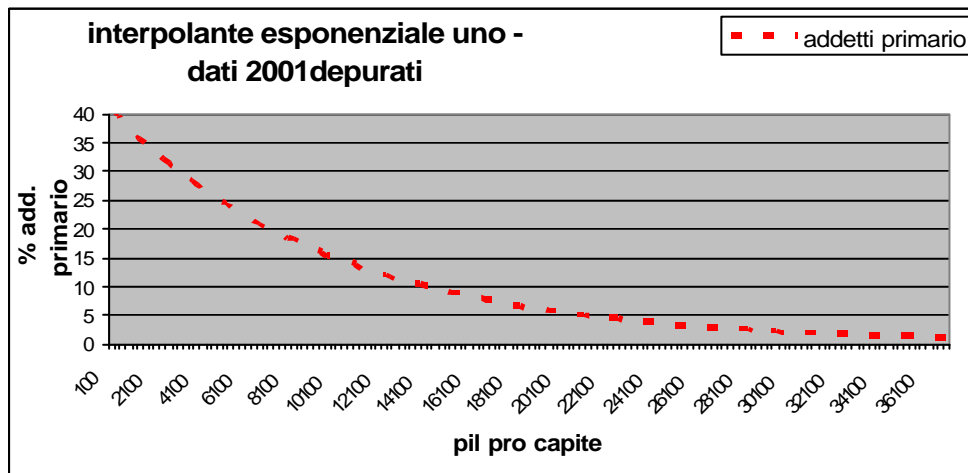
che ci permette di ottenere una curva rappresentata nelle *figure 3.A.7 e 3.A.8*

Figura 3.B.7



che, nella scala monometrica diventa :

Figura 3.B.8



Utilizzando il test *chi – quadro* (χ^2) come indice di adattamento delle interpolazioni si è pervenuto al risultato che la curva che meglio si adatta ai dati posseduti è la curva *iperbole* del tipo

$$y = a + \frac{b}{x}$$

<i>Interpolante</i>	<i>Tipo di equazione</i>	<i>Equazione</i>	$c^2 = \sum \frac{(y - y^*)^2}{y^*}$
<i>Iperbole Una</i>	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{15077,99}{x}$	5961,268843
<i>Iperbole Due</i>	$y = a + \frac{b}{x}$	$y = 15,81328672 + \frac{13209,85889}{x}$	1403,054014
<i>Iperbole Tre</i>	$y = ax + \frac{b}{x}$	$y = 0,000280998 * x + \frac{16995,65044}{x}$	4107,996682
<i>Esponenziale negativa</i>	$y = A * e^{Kx}$	$y = 41,00478953 * e^{-0,000101718 * x}$	1797,236242

6. INTERPOLAZIONE CON UNA RETTA

L'esame della interpolante costituita dalla iperbole equilatera ci ha suggerito di verificare una interpolante costituita da una retta, o meglio da due semirette

$$y = a_1x + b_1 \quad \text{nel dominio } 0 = x = 4400$$

$$y = a_2x + b_2 \quad \text{nel dominio } 4400 = x < 8$$

Effettuando l'interpolazione ai minimi quadrati otteniamo

$$y = -0,014x + 62 \quad \text{nel dominio } 0 = x = 4400$$

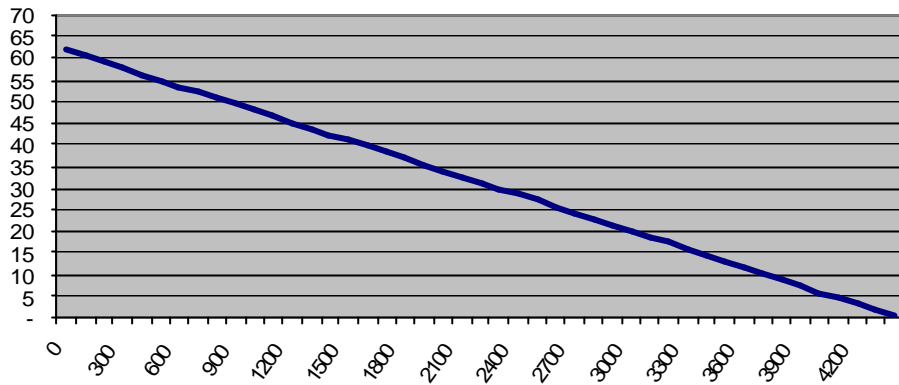
$$y = -0,000244x + 11 \quad \text{nel dominio } 4400 = x < 8$$

e verificando il test *chi - quadro* (χ^2) come indice di adattamento

Interpolante	Tipo di equazione	Equazione	$c^2 = \sum \frac{(y - y^*)^2}{y^*}$
<i>Iperbole Una</i>	$y = \frac{a}{x}$	$y = \frac{15077,99}{x}$	5961,268843
<i>Iperbole Due</i>	$y = a + \frac{b}{x}$	$y = 15,81328672 + \frac{13209,85889}{x}$	1403,054014
<i>Iperbole Tre</i>	$y = ax + \frac{b}{x}$	$y = 0,000280998 * x + \frac{16995,65044}{x}$	4107,996682
<i>Esponenziale negativa</i>	$y = A * e^{Kx}$	$y = 41,00478953 * e^{-0,000101718x}$	1797,236242
<i>semiretta</i>	$y = ax + b$	$y = -0,014x + 62 \quad \text{nel dominio } 0 = x = 4400$ $y = -0,000244x + 11 \quad \text{nel dominio } 4400 = x < 8$	1049,489

che ci fa concludere essere la retta la migliore interpolante.

interpolante RETTA UNA



interpolante RETTA DUE

