Valutazione di attività reali in condizioni di incertezza e flessibilità[1]

Andrea Gamba
(andrea.gamba@univr.it)
Dipartimento di Scienze Economiche e Finanziarie
Università di Verona
Via Giardino Giusti, 2 - 37129 Verona

Prima versione: Gennaio 2003
Questa versione: Febbraio 2003

[1]Questo lavoro è parte di una monografia edita da Cotta Ramusino e pubblicata da *Il Sole 24 Ore*.

Indice

1 Introduzione

Questo lavoro costituisce un'introduzione alle tecniche di valutazione degli investimenti in attività reali (*capital budgeting*) e alla più generale valutazione aziendale. Il tema è svolto a partire dalla considerazione che i tratti fondamentali delle attività reali sono l'*incertezza* dei risultati economici e la *flessibilità*, intesa come possibilità del decisore di mutare i piani e le decisioni al verificarsi di determinati eventi futuri. Lo scopo è quello di fornire strumenti di valutazione in grado di cogliere e valutare adeguatamente tali caratteristiche.

Partiremo, nella sezione 2, presentando il fondamentale principio di valutazione proposto dalla moderna teoria finanziaria basato sulle aspettative dei flussi di cassa e sui tassi aggiustati per il rischio derivanti dai mercati finanziari. Tale principio di valutazione (che denomineremo DCF) ben consolidato per la valutazione delle attività finanziarie, è nella prassi utilizzato anche per dare una valutazione di mercato degli investimenti aziendali e delle imprese. Nella sezione 2.4 metteremo in luce l'insufficienza di tale approccio per la valutazione di titoli derivati (sulle attività finanziarie). Tale insufficienza fornisce motivo per l'introduzione di un approccio alternativo (neutrale al rischio), basato sul concetto di equivalente certo (sezione 3). Sarà stabilito il legame tra l'equivalente certo e gli altri concetti noti (prezzi a termine di attività finanziarie, CAPM, cambiamento di probabilità, valutazione per replicazione), fornendo in tal modo giustificazione dell'equivalenza fra l'approccio neutrale al rischio e il più tradizionale approccio basato sui flussi di cassa attesi scontati ad un tasso aggiustato per il rischio.

Nella sezione 4 introdurremo il principio DCF per la valutazione di attività reali mettendone subito dopo (sezione 5) in luce l'inadeguatezza, in quanto non riesce a cogliere alcuni aspetti fondamentali di tutti gli investimenti aziendali: l'incertezza, la flessibilità e la irreversibilità. Presenteremo quindi il c.d. approccio delle *opzioni reali*, adatto per la valutazione degli investimenti in condizioni di incertezza e in presenza di flessibilità. In base a tale approccio, la flessibilità si esplica come un'opportunità (opzione) da esercitarsi su un'attività reale. Tale intuizione si rivela importante soprattutto perché consente l'applicazione dell'approccio neutrale al rischio (introdotto per i titoli derivati finanziari) per la valutazione delle attività reali. Procederemo presentando dapprima le opzioni reali singolarmente intese (sezione 6) per poi descrivere situazioni in cui le opzioni reali insite in un qualsiasi progetto d'investimento o impresa costituiscono un "portafoglio" di cui rilevano tanto i valori delle singole opportunità quanto il valore derivante dalla loro interazione (sezione 7).

Il lavoro è stato scritto con la costante preoccupazione di minimizzare il formalismo e la necessità di ricorrere ad altri testi. Tuttavia, faremo in ogni punto riferimento alla ormai vasta letteratura disponibile per ulteriori approfondimenti.

2 Valutazione di attività finanziarie

Il valore fondamentale di un'attività finanziaria è dato da un'opportuna attualizzazione dell'aspettativa dei flussi di cassa attesi futuri che tale attività promette.

Per chiarezza, ci riferiremo ai titoli azionari. Sia data un'azione il cui prezzo corrente sia P_0. In un'ottica uniperiodale, il dividendo pagato alla fine del periodo in corso sia D_1 e il prezzo di fine periodo sia P_1. Il dividendo e il prezzo di fine periodo sono variabili aleatorie di cui si assume nota la distribuzione di probabilità. Allora, il *tasso di capitalizzazione* dell'azione è dato da

$$\mu = \frac{\mathbb{E}_0\left[D_1\right]}{P_0} + \frac{\mathbb{E}_0\left[P_1\right]}{P_0} - 1, \tag{1}$$

ove $\mathbb{E}_t[\cdot]$ indica il valore atteso, condizionato all'informazione disponibile al tempo t, secondo le probabilità oggettive (o empiriche). Nell'equazione (1) il tasso di capitalizzazione è dato da un tasso di *capital gain* pari a $\mathbb{E}_0\left[P_1\right]/P_0 - 1$ e da un tasso di dividendo $\mathbb{E}_0\left[D_1\right]/P_0$. Il tasso di capitalizzazione μ, oltre che tenere conto del differimento della disponibilità di P_1 e D_1, deve essere anche rapportato alla loro incertezza. In effetti, in base all'osservazione che gli agenti sono avversi al rischio, l'investimento nel titolo azionario viene accettato solo se il tasso di rendimento atteso fornisce un compenso anche per il rischio sopportato. Quindi μ è un *tasso aggiustato per il rischio* (Risk Adjusted Discount Rate – RADR), ovvero è dato dal tasso di rendimento per gli investimenti privi di rischio (come i Titoli di Stato) aumentato di un *premio per il rischio*. Quindi, detto r il tasso di rendimento privo di rischio e μ il tasso atteso di rendimento rischioso, si definisce premio per il rischio la quantità $\Phi = \mu - r$.

2.1 Il modello *Discounted Cash Flow*

La formula (1) può essere usata anche in senso inverso per calcolare il valore di un'azione, noti il dividendo atteso, il prezzo atteso di fine periodo e il tasso periodale di capitalizzazione μ di un'azione della stessa classe di rischio di quella in esame:

$$P_0 = \frac{\mathbb{E}_0[D_1] + \mathbb{E}_0[P_1]}{(1+\mu)}.$$

Il prezzo in $t = 1$ sarà dato, nell'ipotesi che il tasso di capitalizzazione rimanga costante, da

$$P_1 = \frac{\mathbb{E}_1[D_2] + \mathbb{E}_1[P_2]}{(1+\mu)}$$

ove P_2 e D_2 sono rispettivamente prezzo e dividendo in $t = 2$. Quindi il prezzo corrente risulta[1]

$$P_0 = \frac{\mathbb{E}_0[D_1]}{(1+\mu)} + \frac{\mathbb{E}_0[D_2]}{(1+\mu)^2} + \frac{\mathbb{E}_0[P_2]}{(1+\mu)^2}.$$

Se non esiste una scadenza naturale per il titolo azionario, è evidente a questo punto il significato della seguente formula per il calcolo del prezzo dell'azione:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}_0[D_t]}{(1+\mu)^t} \tag{2}$$

ove si è usata la condizione che $\mathbb{E}_0[D_t]/(1+\mu)^t$ sia trascurabile per t molto grande. Secondo questo modello, il valore *fondamentale* di un'azione è dato dal valore attuale, calcolato secondo il tasso aggiustato per il rischio, dei dividendi attesi futuri. Quindi, anche se è vero che gli agenti acquistano azioni per ottenere il dividendo e il *capital gain*, in ultima analisi ciò che determina il valore di un'azione è l'aspettativa di dividendi futuri. Per questo motivo, la (2) è detto modello *Discounted Cash Flow* (DCF).[2]

Il valore dato dalla (2) è il prezzo di mercato dell'azione. Infatti, in base al principio di arbitraggio, si può affermare che risulta non coerente con l'assenza di arbitraggi tanto un prezzo superiore a P_0, in quanto il tasso di capitalizzazione risulterebbe inferiore a μ e gli agenti potrebbero vendere l'azione in oggetto e acquistarne un'altra della stessa classe di rischio con rendimento μ, quanto un prezzo inferiore per il motivo opposto. Perciò, il DCF può essere usato per la determinazione del prezzo di un'azione posto che sia chiaramente determinato il premio per il rischio, Φ. Nel seguito (sezioni 2.2 e 2.3), esporremo alcuni modelli per determinare questa quantità fondamentale.

Il modello in (2) può essere generalizzato al caso in cui il tasso di capitalizzazione sia funzione del tempo

$$P_0 = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}_0[D_t]}{(1+\mu_1)\dots(1+\mu_t)} \tag{3}$$

ove μ_t è il tasso di capitalizzazione uniperiodale che deriva dalla condizione

$$\mu_t = \frac{\mathbb{E}_0\left[D_{t+1}\right]}{P_t} + \frac{\mathbb{E}_0\left[P_{t+1}\right]}{P_t} - 1.$$

Per poter applicare la regola di calcolo delle aspettative condizionate nella determinazione del valore fondamentale dell'azione, l'evoluzione dei tassi

[1] Si ricorda che vale la Legge delle Aspettative Iterate, secondo cui prevale il condizionamento all'informazione più povera: $\mathbb{E}_t\left[\mathbb{E}_{t+1}[\cdot]\right] = \mathbb{E}_t[\cdot]$.

[2] Riferito alle azioni, il modello è anche detto *Dividend Discount Model.* Preferiamo però l'altra denominazione, perché ricomprende anche il caso in cui si valutino attività reali.

aggiustati per il rischio deve essere non stocastica o, in altre parole, tale tasso devono essere al più funzione del tempo. Infatti, l'equazione (3) si ottiene dalla seguente

$$P_0 = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=1}^{+\infty} \frac{D_t}{(1+\mu_1)\dots(1+\mu_t)} \right] \tag{4}$$

se i tassi $\{\mu_t\}$ sono non stocastici e quindi possono essere "portati fuori" dall'aspettativa $\mathbb{E}[\cdot]$. In base alla (3), il calcolo del prezzo di un'azione a tasso μ costante risulta giustificato se il rischio sopportato in ogni periodo è costante in quanto il premio per il rischio è sempre lo stesso. Questo succede quando l'incertezza sui dividendi si risolve gradualmente nel tempo.[3] In casi in cui l'incertezza si risolve in maniera improvvisa e con discontinuità, il modello più corretto è quello in (3).

2.2 CAPM

Nel DCF, un ruolo fondamentale è svolto dal premio per il rischio Φ. Sono stati proposti diversi modelli per la determinazione di Φ: il più celebre e utilizzato tra questi è sicuramente il *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) dovuto a Lintner [15, 14], Mossin [21] e Sharpe [30]. Questo modello, che rappresenta uno dei principali risultati della finanza moderna, stabilisce che *il premio per il rischio in un mercato in equilibrio non deve essere proporzionato a tutto il rischio sopportato dall'investitore ma al solo rischio che non può essere eliminato nemmeno con un'opportuna strategia di diversificazione*, fermo restando il rendimento atteso desiderato. Il rischio residuale dalla politica di diversificazione, detto *rischio sistematico*, è quello che colpisce tutte le attività finanziarie, e quindi colpisce il rendimento del portafoglio di mercato, inteso questo come il portafoglio che, avendo quote di composizione pari alla capitalizzazione relativa delle attività finanziarie, è rappresentativo dell'intero mercato. Riferendo il lettore ai lavori originari o alla letteratura sul CAPM,[4] daremo qui solo la relazione fondamentale che lega l'extra-rendimento della generica attività finanziaria all'extra-rendimento del portafoglio di mercato, in cui risulta concentrato tutto il rischio sistematico. Nel CAPM, il legame tra la variabile esplicativa $R_M - r$, extra-rendimento del portafoglio di mercato, e $R_i - r$, extra-rendimento del titolo i-esimo, è assunto lineare:

$$R_i - r = \alpha_i + \beta_i (R_M - r) + \varepsilon_i \tag{5}$$

in cui α_i e β_i sono coefficienti e ε_i è il residuo del titolo i-esimo e, inoltre, $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ ed ε_i stocasticamente indipendente da R_M e da ε_j per ogni

[3] Si veda su questo punto Robichek e Myers [25, Nota 6].

[4] Esistono molti manuali su questo tema. Solo per citare i più famosi, in inglese Brealey e Myers [3], Copeland e Weston [7], Ross, Westerfield e Jaffe [28] e recentemente Cochrane [5].

$j \neq i$. Nell'equazione (5) si può distinguere la parte *sistematica* dell'extra-rendimento del titolo i-esimo, data da $\alpha_i + \beta_i (R_M - r)$, dalla parte *non sistematica*, ε_i.[5]

In ipotesi di equilibrio del mercato finanziario, $\alpha_i = 0$ per ogni titolo. Inoltre, β, parametro che stabilisce la forza del legame lineare fra il rendimento del titolo $i-$esimo e il rendimento del portafoglio di mercato, può essere assunto come misura del rischio sistematico. Dall'equazione (5), il tasso atteso di rendimento del generico titolo i-esimo e il il tasso atteso di rendimento del portafoglio di mercato sono legati dalla seguente equazione:

$$\mu_i = r + \beta_i (\mu_M - r) \tag{6}$$

Questa è detta *linea di mercato dei titoli* (Security Market Line o SML) e rappresenta il legame tra il rendimento atteso di un titolo e il suo rischio sistematico, misurato da β. Secondo la SML, il premio per il rischio di un titolo è legato al premio per il rischio del portafoglio di mercato in ragione del solo rischio sistematico misurato da β:

$$\Phi_i = \beta_i (\mu_M - r) \,. \tag{7}$$

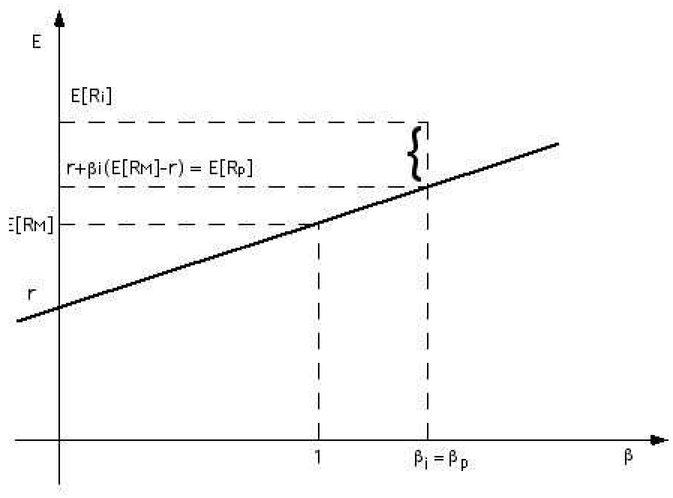

Figura 1: SML e arbitraggio

La SML raccoglie tutte le attività presenti nel mercato in equilibrio. Infatti, nessuna attività quotata può stare, nelle ipotesi del modello, fuori dalla SML. Se così fosse, si avrebbe la possibilità di ottenere un arbitraggio. Per illustrare questo fatto (vedi figura 1), poniamo ad esempio che la coppia $(\beta_i, \mathbb{E}[R_i])$ che rappresenta il titolo i-esimo non appartenga alla SML in

[5]Nell'ipotesi che la distribuzione dei rendimenti sia una Normale multivariata, l'indipendenza stocastica tra ε_i e R_M è equivalente alla condizione $\text{Cov}[\varepsilon_i, R_M] = 0$.

quanto $\mathbb{E}[R_i] > r + \beta_i (\mathbb{E}[R_M] - r)$. Miscelando opportunamente il titolo a rendimento certo con il portafoglio di mercato si può ottenere un portafoglio $(\beta_P, \mathbb{E}[R_P])$ con $\beta_P = \beta_i$ e $\mathbb{E}[R_P]$ secondo la (6). Quindi, potremmo vendere allo scoperto il portafoglio $(\beta_P, \mathbb{E}[R_P])$ e acquistare il titolo $(\beta_i, \mathbb{E}[R_i])$ lucrando la differenza $\mathbb{E}[R_i] - \mathbb{E}[R_P] > 0$ senza rischio (sistematico) in quanto il β complessivo dell'operazione risulta nullo. Evidentemente, questo è un arbitraggio e in quanto tale incompatibile con l'equilibrio del mercato. Nello stesso modo, con le opportune variazioni, si dimostra che neppure il caso $\mathbb{E}[R_i] < r + \beta_i (\mathbb{E}[R_M] - r)$ può essere accettato. Quindi, *per ogni attività quotata nel mercato finanziario in equilibrio deve valere l'equazione* (6).

Per il calcolo del β di un titolo, e quindi per la determinazione del premio per il rischio (teorico) da applicare nella valutazione di un'attività finanziaria, si procede usando l'equazione (5) come una retta di regressione, aggiungendo l'ipotesi di Normalità della distribuzione dei rendimenti. Secondo tale accezione, in base al metodo dei minimi quadrati, si ha

$$\hat{\beta}_i = \frac{\mathrm{Cov}[R_i, R_M]}{\mathbb{V}[R_M]},$$

ove $\mathbb{V}[\cdot]$ denota la varianza di una variabile casuale. Risulterà utile riscrivere la SML come:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \mathrm{Cov}\left[R_i, (\mu_M - r)\frac{R_M}{\mathbb{V}[R_M]}\right] && \text{(8a)} \\ &= \lambda \rho_{i,M} \sigma_i, && \text{(8b)} \end{aligned}$$

ove si è sfruttata la relazione $\mathrm{Cov}[R_i, R_M] = \rho_{i,M}\sigma_i\sigma_M$, in cui $\sigma_i = \sqrt{\mathbb{V}[R_i]}$, $\rho_{i,M}$ è il coefficiente di correlazione lineare fra R_i e R_M e $\lambda = (\mu_M - r)/\sigma_M$ è il *prezzo di mercato per unità di rischio sistematico*, una quantità caratteristica del mercato finanziario in equilibrio e indipendente dal titolo considerato. In particolare, la (8a) mette in luce che viene premiato il solo *rischio di covarianza* con il portafoglio di mercato.

2.3 APT

In base al CAPM, il premio per il rischio di una certa attività finanziaria risulta commisurato al legame con il rendimento del portafoglio di mercato, assunto questo come fattore determinante la rischiosità delle singole attività. Nella realtà si osserva che i fattori (esplici o latenti) che determinano la rischiosità di tutte le attività finanziarie possono essere molteplici. Quindi, si dovrebbe poter commisurare il premio per il rischio di una certa attività al legame con i singoli fattori di rischio. Il modello di Ross [27], noto come *Asset Pricing Theory* (APT), prende spunto proprio da questa osservazione e si formalizza in una relazione lineare per il premio per il rischio di un'attività finanziaria (in un contesto uniperiodale) che estende la SML secondo l'equazione (6). Sempre rinviando per gli approfondimenti al lavoro originario o ai testi già citati, in maniera sintetica, invece della relazione (5), per la determinazione del premio per il rischio si considera una relazione del tipo

$$R_i = \alpha_i + \beta_i^1 S_1 + \beta_i^2 S_2 + \ldots + \beta_i^k S_k + \varepsilon_i \quad i = 0, \ldots, n \tag{9}$$

ove con $S_1, \ldots, S_k$ si indicano i fattori esplicativi (variabili di stato) dell'economia, con $\alpha_i = \mu_i$, il rendimento atteso del titolo i-esimo e con β_i^j il coefficiente che esprime la forza del legame tra il rendimento del titolo i-esimo e il j-esimo fattore esplicativo. Per gli ε_i valgono le stesse ipotesi fatte per il CAPM: $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ e ε_i stocasticamente indipendente da S_j, per $j = 1, \ldots, k$ e da ogni altro ε_h, $h \neq i$. Rispetto alla (9), la relazione fondamentale del CAPM, equazione (5), presenta un solo fattore: il rendimento del portafoglio di mercato, $S_1 = R_M$.

Assumendo che vi siano sul mercato un numero elevato di attività finanziarie (in particolare, $n \gg k$), l'equazione per determinare il premio per il rischio è determinata sfruttando ancora una volta l'idea che nel mercato finanziario non vi possano essere opportunità di arbitraggio durature. Quindi, ferme restando le ipotesi di mercato finanziario senza frizioni, senza limitazioni alle vendite allo scoperto e di agenti con opinioni conformi, il premio per il rischio del titolo i-esimo risulta pari a

$$\Phi_i = \mu_i - r = \sum_{j=1}^{k} \beta_i^j (\mu^j - r) : \tag{10}$$

ove μ^j è il rendimento di un portafoglio influenzato dal solo fattore j-esimo. In base alla (10), il premio per il rischio di un titolo è commisurato al premio per il rischio assegnato dal mercato finanziario a ciascun fattore esplicativo in base al coefficiente che esprime la dipendenza lineare del rendimento del titolo ai vari fattori.

Si osserva che, introducendo l'ulteriore ipotesi che i rendimenti delle attività finanziarie siano Normalmente distribuiti e i fattori esplicativi siano fra loro stocasticamente indipendenti,[6] l'equazione (10) può essere interpretata come una retta di regressione multivariata del premio per il rischio sui fattori. In particolare, data l'equazione

$$R_i - r = \alpha_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_i^j (\mu^j - r) + \varepsilon_i :$$

possiamo stimare, mediante il metodo dei minimi quadrati, i coefficienti β_i^j, per cui risulta, come per il CAPM, $\hat{\beta}_i^j = \mathrm{Cov}[R_i, S_j]/\mathbb{V}[S_j]$. In questo senso,

[6] Si può sempre ricondurre il modello al caso con fattori stocasticamente indipendenti: basta adottare una specifica trasformazione lineare che cambi il sistema di riferimento cartesiano dello spazio degli stati, per cui i nuovi fattori sono fra loro ortogonali (tecnica adottatat nell'*analisi delle componenti principali*).

l'APT offre un modello (statisticamente testabile) alternativo al CAPM per la determinazione del corretto premio per il rischio da utilizzare nel DCF. Si nota che, ancora una volta, viene premiato il solo rischio di covarianza con i fattori esplicativi.

Si vuole concludere questa sezione con la seguente osservazione: anche in un modello con molteplici fattori di rischio abbiamo la possibilità di esprimere il premio per il rischio in relazione ad un solo fattore, come nel caso del CAPM. Infatti,[7] noti i premi per il rischio dei fattori esplicativi, $\mu^j - r$, e per la linearità della covarianza:

$$
\begin{aligned}
\Phi_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathrm{Cov}[R_i, S_j]}{\mathbb{V}[S_j]} \left(\mu^j - r\right) &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Cov}\left[R_i, \left(\mu^j - r\right) \frac{S_j}{\mathbb{V}[S_j]}\right] \\
&= \mathrm{Cov}\left[R_i, \sum_{j=1}^{k} \left(\mu^j - r\right) \frac{S_j}{\mathbb{V}[S_j]}\right] = \mathrm{Cov}\left[R_i, X\right]
\end{aligned}
$$

ove $X = \sum_j \left(\mu^j - r\right) S_j/\mathbb{V}[S_j]$ è l'unico fattore di rischio necessario per "spiegare" i premi per il rischio di tutte le attività finanziarie. L'equazione ottenuta è facilmente riconducibile alla (8a).

Quindi, nonostante la maggiore analiticità dell'APT nella determinazione del premio per il rischio rispetto al CAPM, agli effetti della valutazione, ancora una volta conta la sola covarianza con un ben determinato "fattore", sia esso esplicito (il portafoglio di mercato) o implicito.

2.4 Insufficienza dell'approccio DCF per la valutazione di opzioni

Per motivare la necessità di una diversa metodologia di valutazione delle attività finanziarie, tenteremo di valutare un'opzione (finanziaria) secondo l'approccio DCF/RADR.

Sia data un'opzione *call* che ha come bene sottostante azioni. Denotato con $P(t)$ il prezzo del bene sottostante nell'istante t e con k il prezzo di esercizio, allora il *payoff* derivante dall'esercizio dell'opzione *call* all'epoca t è $\max\{P(t) - k, 0\}$. Infatti, se $P(t)$ è inferiore al prezzo dell'esercizio, il possessore troverà più conveniente acquistare il bene direttamente sul mercato e quindi il beneficio arrecato dall'opzione è nullo; se invece $P(t)$ è maggiore di k, allora troverà conveniente esercitare l'opzione pagando k un bene che vale $P(t)$. In tal caso il beneficio derivante dall'opzione è $P(t) - k$. È evidente la natura di titoli derivati delle opzioni finanziarie: il beneficio portato dal possesso dell'opzione dipende ("deriva") *solo* dal prezzo del bene sottostante. Per semplicità, presenteremo il tentativo di valutazione dell'opzione *call*

[7] Si segue quanto suggerito in Roll e Ross [26, Nota 5].

in un ambito uniperiodale. Sia dato l'intervallo $[0, 1]$ e si assuma che l'azione sottostante non paghi dividendi in tale periodo. La dinamica del prezzo dell'azione nel periodo considerato sia di tipo binomiale per cui, detto $P(0)$ il prezzo corrente, in $t = 1$ risulta:

$$P(1) = \begin{cases} P^u = P(0)u & \text{con probabilità } p \\ P^d = P(0)d & \text{con probabilità } (1-p) \end{cases}$$

ove p (e $(1-p)$) è la probabilità oggettiva o empirica.[8] Sia disponibile inoltre il titolo a rendimento certo, con tasso di interesse periodale r tale che $d < 1 + r < u$.[9] Inoltre, al fine di evitare banalità, valga la relazione $P^d < k < P^u$.

Per determinare il prezzo dell'opzione considerata con il modello DCF, denominato $C(1)$ il *payoff* dell'opzione in $t = 1$,

$$C(1) = \begin{cases} C^u = P(0)u - k & \text{con probabilità } p \\ C^d = 0 & \text{con probabilità } (1-p) \end{cases} \tag{11}$$

dovremmo innanzitutto calcolare il valore atteso del *payoff* secondo le probabilità oggettive:

$$\mathbb{E}_0[C(1)] = p \times C^u + (1-p)C^d.$$

Poi, si dovrebbe scontare tale valore secondo un tasso corretto per il rischio scelto opportunamente. Avvisiamo subito che tale non può essere il tasso di capitalizzazione dell'azione:

$$\mu_P = \frac{\mathbb{E}_0[P(1)]}{P(0)} - 1.$$

Infatti, l'opzione non è nella stessa classe di rischio (cioè, nelle ipotesi del CAPM, non ha lo stesso β) dell'azione.

Determiniamo il RADR opportuno per l'opzione. A tal fine, osserviamo che la correlazione lineare del tasso di rendimento dell'opzione con il tasso di rendimento dell'azione sottostante in $t = 1$ è perfetta: $\rho_{C,P} = 1$.[10] Quindi, anche senza conoscere la correlazione del tasso di rendimento dell'azione con il tasso di rendimento del portafoglio di mercato, sappiamo che $\rho_{M,P} = \rho_{M,C}$. Inoltre, avendo a disposizione la volatilità del tasso di rendimento dell'opzione, denotata con σ_C, possiamo, mediante l'equazione (8b),

[8] Per empirica, intenderemo la distribuzione di probabilità derivata dall'analisi della serie storica di $\{P_t\}$. Si rende necessaria questa specificazione in quanto avremo presto a che fare con un altro tipo di probabilità per i medesimi eventi.

[9] Se questa condizione non fosse soddisfatta si potrebbe costruire un arbitraggio.

[10] Lo verificheremo numericamente nell'esempio successivo.

calcolare il premio per il rischio per l'opzione, $\Phi_C = \lambda\rho_{M,C}\sigma_C$, e ottenere poi il RADR μ_C da applicare per ottenere il prezzo di mercato dell'opzione:

$$C(0) = \frac{\mathbb{E}_0[C(1)]}{1+\mu_C}.$$

Ad illustrazione di quanto sopra, si veda il seguente esempio.

Esempio 1. Si consideri un'azione che ha prezzo corrente $P(0) = 5$ e, in $t = 1$,

$$P(1) = \begin{cases} 9 & \text{con probabilità } 1/2 \\ 3 & \text{con probabilità } 1/2. \end{cases}$$

Sia data un'opzione *call*, emessa su questa azione, con prezzo di esercizio $k = 7.5$ e scadenza in $t = 1$. Sia infine disponibile il titolo a rendimento certo della stessa durata con tasso di rendimento periodale $r = 0.08$. Il RADR dell'azione è

$$\mu_P = \frac{\mathbb{E}_0[P_1(1)]}{P_1(0)} - 1 = \frac{6}{5} - 1 = 0.2,$$

e la deviazione standard del rendimento

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{9}{5} - 1 - 0.2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} - 1 - 0.2\right)^2} = 0.6.$$

Il *payoff* dell'opzione è

$$C(1) = \begin{cases} 9 - 7.5 = 1.5 & \text{con probabilità } 1/2 \\ 0 & \text{con probabilità } 1/2 \end{cases} \tag{12}$$

e il suo valore atteso

$$\mathbb{E}_0[C(1)] = 1.5 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = 0.75.$$

Seguendo la logica descritta poco sopra, sia $\sigma_C = 1.35$ la volatilità del tasso di rendimento dell'opzione.[11] Si verifica che, per l'azione

$$\lambda\rho_{M,P} = \frac{\mu_P - r}{\sigma_P} = \frac{0.2 - 0.08}{0.6} = 0.2.$$

Essendo $\mathbb{E}[P(1)] = 6$, $\mathbb{V}[P(1)] = 9$, $\mathbb{E}[C(1)] = 0.75$, $\mathbb{V}[C(1)] = 0.5625$ e $\mathrm{Cov}[P(1), C(1)] = 2.25$, allora

$$\rho_{P,C} = \frac{\mathrm{Cov}[P(1), C(1)]}{\sqrt{\mathbb{V}[P(1)]\mathbb{V}[C(1)]}} = 1,$$

[11] Per il momento accogliamo questo dato come un dono del cielo.

come detto sopra. Si verifica facilmente che il coefficiente di correlazione fra i *payoff* dell'azione e dell'opzione concide con il coefficente di correlazione fra i rendimenti dell'azione e dell'opzione:[12] $\rho_{M,P} = \rho_{M,C}$. Allora, il RADR dell'opzione è

$$\mu_C = r + \lambda \rho_{M,C} \sigma_C = 0.08 + 0.2 \times 1.35 = 0.35.$$

Perciò, il prezzo del'opzione secondo il modello DCF risulta

$$C(0) = \frac{\mathbb{E}_0[C(1)]}{(1+\mu_C)} = \frac{0.75}{1.35} = 0.555.$$

□

È stato possibile calcolare tale prezzo perché "miracolosamente" si è resa disponibile la volatilità del rendimento dell'opzione. Normalmente, tale volatilità può essere calcolata a partire dalla conoscenza del prezzo dell'opzione, dato che il tasso di rendimento atteso dell'opzione è $R_C = C(1)/C(0) - 1$. Tuttavia, $C(0)$ è proprio ciò che stiamo cercando di calcolare.

Riassumendo: dal tentativo di valutare l'opzione secondo il modello DCF, dato che il RADR dell'azione non può essere utilizzato, si è evinto che il RADR dell'opzione non può essere determinato senza la preventiva conoscenza della volatilità del suo rendimento, σ_C. Come uscire da questo *impasse*?

Nelle pagine seguenti supereremo tale difficoltà semplicemente cambiando il paradigma di valutazione: invece del modello DCF secondo il tasso RADR, si adotta un modello neutrale al rischio basato sull'equivalente certo.

3 Equivalente certo e valutazione neutrale al rischio

In questa sezione introdurremo, a partire dal concetto di equivalente certo, un approccio per la valutazione di importi rischiosi alternativo al modello DCF/RADR. È importante sottolineare che questo approccio *utilizza i medesimi dati ed è basato sulle stesse ipotesi* del DCF. La differenza sta nella maniera in cui tali dati e ipotesi sono impiegati.

Secondo il metodo DCF/RADR, il prezzo di un importo aleatorio è dato dal valore atteso (condizionato all'informazione corrente) scontato ad un tasso di interesse opportunamente aggiustato per il rischio (RADR), pari al tasso privo di rischio aumentanto del premio per il rischio, secondo il modello di mercato finanziario che si ritiene più adatto. L'approccio alternativo, invece, separa l'effetto del differimento dei flussi di cassa attesi (tasso privo di rischio) da quello del rischio (premio per il rischio). Si determina quindi il valore certo che si ritiene scambiabile con l'importo aleatorio, qualunque

[12] Vedi anche la nota 15.

sia l'epoca in cui tale importo viene conseguito. Questo valore, denominato opportunamente *equivalente certo* dell'importo aleatorio, viene poi scontato in base al tasso privo di rischio.[13]

Il concetto di equivalente certo, derivante dalla teoria dell'utilità attesa secondo Von Neumann e Morgestern [32], è stato introdotto in ambito finanziario da Robichek e Myers [24, 25] per la valutazione di investimenti in attività reali. È interessante notare che l'equivalente certo sta alla base anche del celebre modello di valutazione delle opzioni finanziarie dovuto a Merton [17] Black e Scholes [1].

Sembra quindi ovvio introdurre l'equivalente certo come metodo di valutazione delle opzioni che sono insite nelle decisioni di investimento aziendale. Presenteremo l'equivalente certo inizialmente nella sua definizione più semplice di prezzo a termine (o *forward*), assumendo che esista un mercato a termine per l'attività che si vuole valutare. Proporremo inoltre una definizione secondo il CAPM (o APT) prima e secondo l'introduzione di una modificazione della distribuzione di probabilità del rendimento dell'attività rischiosa poi. Infine, vedremo come si possa ottenere l'equivalente certo di un importo rischioso anche solo aggiustandone il tasso di crescita attesa per il premio per il rischio. Verificheremo che tutte le definizioni sono equivalenti, ciascuna suggestiva di un particolare aspetto del medesimo oggetto.

3.1 Equivalente certo e prezzi a termine

Sono di impiego comune contratti per l'acquisto a termine di attività, siano esse *commodity*, azioni, obbligazioni, indici borsistici. Questi contratti impegnano le parti alla compravendita di una certa quantità del bene ad un prezzo prefissato in una data (futura) stabilita. In base a un contratto a termine, il prezzo di compravendita viene fissato alla data della stipula e quindi diventa *certo*.

Detto S_t il prezzo (aleatorio) del bene acquistato a termine e T la data di regolamento, il prezzo a termine è $\hat{S}_T$ ed è una quantità che conosciamo con certezza alla data della stipula. Dato che l'operazione non implica alcun rischio per le controparti, il prezzo a termine del bene viene calcolato tenendo conto del solo costo del tempo ovvero, e quindi il premio per il rischio risulta nullo. L'acquirente a termine trova pertanto equivalente dal punto di vista finanziario pagare il bene al prezzo S_0 in $t = 0$ oppure al prezzo $\hat{S}_T$ in T. Anche il venditore a termine concorda su questa equivalenza fra i prezzi.

[13] Proprio perché si trasforma l'importo aleatorio nel suo equivalente certo, si parla di valutazione in assenza di rischio o *neutrale* rispetto al rischio: dato che secondo questo approccio la valutazione coinvolge importi certi, l'atteggiamento verso il rischio degli agenti (di norma, *avversione al rischio*) non ha alcuna influenza e quindi si può fingere, senza intaccare la validità dei risultati, che gli agenti siano neutrali verso rischio e che non richiedano premi per investire nelle attività rischiose.

Quindi vale l'uguaglianza

$$S_0 = \frac{\hat{S}_T}{(1+r)^T} \tag{13}$$

ove r è, come di consueto, il tasso *risk-free*. L'equazione (13) può anche essere usata in senso inverso per calcolare il prezzo a termine a partire dal prezzo per consegna a pronti.

Questo schema può essere utilizzato in generale per valutare quantità aleatorie. Infatti, se si considera un'azione che, per semplicità, nel periodo $[t-1, t]$ non paga dividendi e che abbia RADR μ_t, allora il suo prezzo corrente risulta

$$P_{t-1} = \frac{\mathbb{E}_{t-1}[P_t]}{(1+\mu_t)} \tag{14}$$

in cui l'aspettativa $\mathbb{E}_{t-1}$ è calcolata secondo le probabilità (oggettive) condizionate all'informazione all'epoca $t-1$. Nell'ipotesi che sia disponibile il contratto a termine su questa azione, per il prezzo a termine vale la relazione

$$P_{t-1} = \frac{\hat{P}_t}{(1+r_t)}. \tag{15}$$

In base alle equazioni (14) e (15), è evidente che la valutazione di un'azione può essere ottenuta anche mediante un approccio *neutrale al rischio*, in quanto basato sul prezzo a termine. Rispetto alla (14), in cui il tasso di interesse valuta sia il differimento (prezzo del tempo) che il premio per il rischio, nella (15) il numeratore tiene conto del solo premio per il rischio e il denominatore del solo differimento. Infatti, dall'equazione

$$\frac{\hat{P}_t}{(1+r_t)} = \frac{\mathbb{E}_{t-1}[P_t]}{(1+\mu_t)}, \tag{16}$$

essendo gli agenti avversi al rischio, risulta $\mu_t > r_t$ (vedi equazione (6)) e quindi $\hat{P}_t < \mathbb{E}_{t-1}[P_t]$. La differenza $\pi_t = \mathbb{E}_{t-1}[P_t] - \hat{P}_t > 0$ è un premio per il rischio espresso in unità monetarie, anziché come maggiorazione del tasso d'interesse atteso.

In generale, anche nei casi in cui *non* è disponibile il prezzo a termine per le quantità di interesse, dato un prezzo aleatorio P_t ci riferiremo all'importo certo $\hat{P}_t$ che soddisfa l'equazione (16) come all'*equivalente certo* di P_t, secondo la proposta di Robichek e Myers [24, 25]. Questi definiscono l'equivalente certo, $\hat{P}_t$, come la *somma certa minima che si è disposti a scambiare con l'importo aleatorio* P_t.

Come per il DCF, anche in questo caso il modello diventa pienamente operativo solo quando possiamo determinare il premio per il rischio. È quanto ci proponiamo di illustrare nei successivi punti.

3.2 Equivalente certo e CAPM

In base all'osservazione che $\hat{P}_t = \mathbb{E}[P_t] - \pi$, possiamo ricavare dal CAPM uniperiodale una formula per la determinazione dell'equivalente certo, seguendo le linee di Bogue e Roll [2].

Infatti, dalla linea del mercato dei capitali (SML) (vedi equazione (6)), ricordando che il rendimento nel periodo $[t-1, t]$ per il titolo il cui prezzo è P_t è $R_t = P_t/P_{t-1} - 1$, si ha

$$\mathbb{E}\left[\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1\right] - r_t = \frac{1}{\mathbb{V}\left[R_{M,t}\right]} \operatorname{Cov}\left[\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1, R_{M,t}\right] (\mu_{M,t} - r_t)$$

da cui, dopo qualche manipolazione, si ottiene

$$P_{t-1} = \frac{\mathbb{E}[P_t] - \lambda_t \operatorname{Cov}[P_t, R_{M,t}]}{(1 + r_t)}, \tag{17}$$

ove $\lambda_t = (\mu_{M,t} - r_t)/\mathbb{V}\left[R_{M,t}\right]$. Confrontando l'equazione (17) con la (15) si vede immediatamente che il CAPM permette di derivare un'espressione dell'equivalente certo come

$$\hat{P}_t = \mathbb{E}[P_t] - \lambda_t \operatorname{Cov}[P_t, R_{M,t}] :$$

ancora una volta, il premio per il rischio π_t è proporzionale alla covarianza del prezzo con il portafoglio di mercato.[14]

3.3 Equivalente certo e cambiamento di probabilità

In questa sezione mostreremo che l'equivalente certo di un importo aleatorio può essere calcolato come valore atteso in base ad una distribuzione di probabilità scelta opportunamente e diversa dalla probabilità oggettiva (o empirica). Questa nuova probabilità esiste in base all'ipotesi di *assenza di opportunità di arbitraggio* nel mercato finanziario. Presentiamo questa proprietà mediante un semplice esempio in un contesto uniperiodale.

Esempio 2. Siano date due azioni che non pagano dividendi nel periodo $[0, 1]$ e con prezzi P_1 e P_2. Per semplicità di argomentazione, supponiamo che i prezzi alla fine dell'intervallo di riferimento siano variabili casuali binomiali con realizzazioni possibili

$$P_1(1) = \begin{cases} 9 & \text{con probabilità } 1/2 \\ 3 & \text{con probabilità } 1/2 \end{cases}, \quad P_2(1) = \begin{cases} 45 & \text{con probabilità } 1/2 \\ 15 & \text{con probabilità } 1/2 \end{cases}$$

Si assume noto il prezzo corrente della prima azione: $P_1(0) = 5$ (è la stessa vista nell'esempio 1). Vogliamo determinare il prezzo della seconda, $P_2(0)$.

[14] È immediato, seguendo la stessa logica, determinare l'equivalente certo anche secondo l'APT.

Il rendimento atteso e la deviazione standard del rendimento della prima sono rispettivamente $\mu_1 = 0.2$ e $\sigma_1 = 0.6$. Sia nota la deviazione standard del rendimento della seconda azione: $\sigma_2 = 0.6$. I prezzi delle due azioni siano per ipotesi perfettamente correlati fra loro, vale a dire che i due titoli sono "gemelli". Di conseguenza, anche i rendimenti delle due azioni risultano perfettamente correlati.[15] Inoltre hanno il medesimo β in base all'equazione (8) (sono della medesima classe di rischio secondo il CAPM).[16] Sul mercato sia inoltre disponibile il titolo con tasso periodale di rendimento certo $r = 0.08$.

Determiniamo $P_2(0)$ in base all'approccio DCF:[17]

$$P_2(0) = \frac{\mathbb{E}_0[P_2(1)]}{(1+\mu)} = \frac{\frac{1}{2} \times 45 + \frac{1}{2} \times 15}{1.2} = 25.$$

Vogliamo ora calcolarlo secondo un approccio neutrale al rischio. A tal fine, determiniamo una probabilità speciale q e $(1-q)$ dei possibili prezzi di P_1 in $t = 1$ per cui sia possibile esprimere il prezzo $P_1(0)$ dell'azione "gemella" secondo l'equivalente certo:

$$P_1(0) = \frac{q \times 9 + (1-q) \times 3}{1.08} = 5.$$

Risolvendo questa equazione si trova $q = 0.4$. Allora, secondo queste probabilità, vale la formula

$$P_1(0) = \frac{\hat{P}_1(1)}{(1+r)}$$

per $\hat{P}_1(1) = \mathbb{E}_0^*[P_1(1)]$, ove $\mathbb{E}^*$ denota il valore atteso calcolato in base alla probabilità q. Dato che i due titoli sono (per ipotesi) perfettamente correlati, possiamo applicare le stesse probabilità, anche ai possibili esiti della seconda

[15]Infatti, detto $R_i = P_i(1)/P_i(0) - 1$ il rendimento dell'azione i-esima, $i = 1, 2$, si ha

$$\mathrm{Cov}[R_1, R_2] = \frac{\mathrm{Cov}[P_1(1), P_2(1)]}{P_1(0)P_2(0)}, \quad \mathbb{V}[R_i] = \frac{\mathbb{V}[P_i(1)]}{P_i(0)^2} \quad i = 1, 2$$

per cui $\rho[P_1(1), P_2(1)] = \rho_{1,2} = \rho[R_1, R_2]$.

[16]In base all'equazione (8), per determinare β dovremmo conoscere il prezzo di mercato per il rischio, λ. Qualunque sia il valore di λ, tuttavia, possiamo dire che le due azioni hanno lo stesso premio per il rischio:

$$\lambda \rho_{1,M} \sigma_1 = \lambda \rho_{2,M} \sigma_2$$

in quanto $\rho_{1,M} = \rho_{2,M}$ essendo i due titoli perfettamente correlati.

[17]Si osserva che *il principio dell'unico prezzo induce prezzi lineari*. È facile constatare infatti che il pagamento della seconda azione è cinque volte il pagamento della prima e che il prezzo della seconda è cinque volte il prezzo della prima. Questo fatto potrebbe costituire un limite alla validità del *principio dell'unico prezzo*. Nella realtà, infatti, siamo abituati ad ottenere sconti quando acquistiamo grandi quantità di un certo bene. Secondo le ipotesi, lo "sconto-quantità" non può esistere in questo (modello di) mercato finanziario.

azione. In base a queste probabilità si ha

$$P_2(0) = \frac{0.4 \times 45 + 0.6 \times 15}{1.08} = 25$$

per cui l'equivalente certo $\hat{P}_2(1) = \mathbb{E}_0^*[P_2(1)]$ è il prezzo calcolato secondo le probabilità "speciali": q (e $(1-q)$). $\square$

Queste probabilità speciali, generalmente diverse dalle probabilità oggettive, sono dette *neutrali al rischio* in quanto consentono di valutare l'attività secondo un approccio in cui il rischio viene neutralizzato. Tali probabilità sono implicite nei prezzi delle attività finanziarie secondo la formula

$$P(0) = \frac{\mathbb{E}_0^*[P(1)]}{(1+r)}. \tag{18}$$

Dal nostro punto di vista, le probabilità neutrali al rischio rappresentano una metodologia di valutazione in base alla quale i prezzi sono valori attesi scontati al tasso *risk-free*, ovvero un diverso approccio per il calcolo dell'equivalente certo dell'importo aleatorio. Tuttavia, esse sono suscettibili di interpretazione economica. Infatti, si osserva che *la probabilità neutrale al rischio tiene conto dell'avversione al rischio degli agenti*: dato che l'avversione al rischio induce un premio per il rischio positivo ($\pi > 0$), allora per l'esito migliore la probabilità neutrale al rischio è minore della probabilità oggettiva (si ha la situazione opposta per probabilità neutrale al rischio dell'esito peggiore). Detto altrimenti, la probabilità neutrale al rischio amplifica l'importanza dell'esito sfavorevole e riduce il peso dell'esito favorevole. In effetti, è proprio di un soggetto avverso al rischio essere relativamente molto sensibile alle diminuzioni di ricchezza e relativamente poco sensibile agli incrementi di ricchezza.

Rimane da capire se il metodo dell'equivalente certo risulti sempre praticabile, ovvero se le probabilità neutrali al rischio esistano sempre e siano univocamente determinate. Un importante risultato della finanza moderna[18] stabilisce che le probabilità neutrali al rischio sono legate alla legge dell'unico prezzo e al concetto di non arbitraggio: dire che esiste (almeno) una probabilità neutrale al rischio implicita nei prezzi delle attività finanziarie è equivalente all'affermazione che nel mercato finanziario non ci sono opportunità di arbitraggio. Ciò significa che si ha la possibilità di applicare l'approccio basato sull'equivalente certo per la valutazione delle attività rischiose ogni volta che è possibile calcolarne il DCF scontato al RADR, dato che i due approcci valutativi dipendono dalle medesime assunzioni.

Tuttavia, la probabilità neutrale al rischio indotta dai prezzi delle attività finanziarie *in generale non è unica* e, dovendo prezzare una attività finanziaria, in alcuni casi ad una molteplicità di probabilità neutrali al rischio corrisponde una molteplicità di possibili prezzi. Per vedere che la

[18] Si vedano Cox, Ingersoll e Ross [8] e poi Harrison e Kreps [12].

probabilità neutrale al rischio in generale non sia unica basta il seguente esempio.

Esempio 3. Si considerino le azioni viste nell'esempio 2, in un contesto lievemente modificato. Le due azioni, che non pagano dividendi nel periodo $[0,1]$, hanno ora prezzi P_1 e P_2 che, alla fine dell'intervallo di riferimento, sono variabili casuali con realizzazioni possibili

$$P_1(1) = \begin{cases} 9 & \text{con probabilità } 1/4 \\ 6 & \text{con probabilità } 1/2 \\ 3 & \text{con probabilità } 1/4 \end{cases}, \quad P_2(1) = \begin{cases} 45 & \text{con probabilità } 1/4 \\ 30 & \text{con probabilità } 1/2 \\ 15 & \text{con probabilità } 1/4. \end{cases}$$

Come prima, assumiamo che i prezzi futuri delle due opzioni siano fra loro perfettamente correlati. Il prezzo corrente della prima azione sia $P_1(0) = 5$ e il tasso per gli investimenti privi di rischio sia $r = 8\%$.

La seconda azione può essere valutata con il metodo DCF: il tasso di rendimento aggiustato per il rischio della prima azione risulta $\mu_1 = 20\%$ e la volatilità del rendimento è circa 0.42. Poiché la correlazione fra i prezzi (e quindi fra i rendimenti) delle due azioni è perfetta, allora, nota la volatilità della seconda, anch'essa pari a 0.42, il RADR della seconda azione è $\mu_2 = 0.2$ per cui si ha

$$P_2(0) = \frac{\frac{1}{4} \times 45 + \frac{1}{2} \times 30 + \frac{1}{4} \times 15}{1.2} = 25.$$

Possiamo valutare la seconda azione anche secondo il metodo dell'equivalente certo. Per fare questo dobbiamo determinare la probabilità neutrale al rischio definita dalla terna (q_1, q_2, q_3) tale che

$$\begin{aligned} &(9q_1 + 6q_2 + 3q_3)/1.08 = 5 \\ &q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ &q_i > 0 \qquad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{19}$$

Purtroppo, esistono infinite terne (q_1, q_2, q_3) che soddisfano la (19). Tuttavia, per la linearità del prezzo della seconda azione rispetto alla prima,[19] a fronte di una molteplicità di probabilità neutrali al rischio si ha un solo prezzo (di equilibrio) $P_2(0) = \mathbb{E}^*[P_2(1)]/(1+r) = 25$. $\square$

In questo esempio, la disponibilità di più probabilità neutrali al rischio non costituisce un problema data la linearità del prezzo della attività da valutare rispetto al prezzo della attività quotata. Tuttavia, vedremo nel seguito che la non unicità della probabilità neutrale al rischio genera imbarazzo nell'applicazione del metodo dell'equivalente certo nelle valutazione di titoli il cui *payoff* risulta non lineare rispetto alle attività finanziarie quotate.

[19] La seconda paga cinque volte più della prima.

3.4 Equivalente certo e aggiustamento del tasso di capitalizzazione

Osservando le equazioni (15), (17) e (18), possiamo constatare che il tasso di capitalizzazione dell'attività (che non paga dividendi) rispetto alle probabilità neutrali al rischio risulta pari al tasso *risk-free*, r:

$$\frac{\mathbb{E}_0^*[P(1)]}{P(0)} - 1 = r \tag{20}$$

o, con capitalizzazione continua,[20]

$$\log \frac{\mathbb{E}_0^*[P(1)]}{P(0)} = r,$$

ove, secondo la probabilità oggettiva, il tasso di capitalizzazione è μ.

Per meglio illustrare questo fatto, si consideri un'azione che non paga dividendi nel periodo considerato. Sappiamo che $\mu = \alpha + \delta$, ove α è il tasso *capital gain* e δ è il *dividend yield*. In questo caso, dato che $\delta = 0$, il tasso di capitalizzazione (RADR) μ coincide con il tasso di *capital gain*. Dalla relazione $\log \mathbb{E}[P_t]/P_0 = \mu t = \alpha t$ abbiamo

$$\mathbb{E}_0[P_t] = P_0 e^{\alpha t} : \tag{21}$$

il valore atteso di P_t è pari al valore corrente capitalizzato in base a un tasso di crescita attesa α. Secondo l'approccio DCF, il prezzo di arbitraggio in $t = 0$ è dato dal valore atteso calcolato secondo le probabilità oggettive e scontato mediante μ:

$$P_0 = \mathbb{E}_0[P_t] e^{-\mu t}. \tag{22}$$

In base al CAPM, in ipotesi di equilibrio del mercato dei capitali, il tasso istantaneo di capitalizzazione è pari al tasso istantaneo *risk-free* aumentato del premio per il rischio: $\mu = r + \Phi$. Allora, sostituendo $\mathbb{E}_0[P_t]$ dalla (21) nella (22) si ottiene:

$$P_0 = \left(P_0 e^{\alpha t}\right) e^{-\mu t} = P_0 e^{\alpha t} e^{-(r+\Phi)t} = \left(P_0 e^{(\alpha-\Phi)t}\right) e^{-rt}. \tag{23}$$

Il significato della relazione in (23) è palese: il prezzo di un'azione si può calcolare sia secondo l'approccio DCF, nella (22), che secondo l'approccio neutrale al rischio, nella (23). Infatti, nel membro destro della (23), la valutazione avviene calcolando l'equivalente certo di P_t, scontato al tasso *risk-free*. Questa equazione suggerisce anche un modo, alternativo a quelli visti nelle sezioni precedenti, per determinare l'equivalente certo di P_t:

$$\hat{P}_t = P_0 e^{(\alpha-\Phi)t}. \tag{24}$$

[20]Stiamo evidentemente abusando della notazione per il tasso *risk-free*. Tuttavia, dato che $\log(1 + r) \approx r$ per valori plausibili di r, allora utilizzeremo la stessa notazione per i tassi di interesse e per i tassi istantanei d'interesse.

In base a questa relazione, l'equivalente certo è calcolato considerando non il tasso di crescita "vero", ma un tasso di crescita "fittizio" determinato a partire da quello reale, α, sottraendo un opportuno premio per il rischio, Φ. Questa metodologia per il calcolo dell'equivalente certo è stata illustrata per la prima volta da Costantinides [6] in un contesto di equilibrio del mercato, secondo le ipotesi del CAPM, e da Cox, Ross e Rubinstein [8] in ipotesi di non-arbitraggio.

Prima di chiudere la sezione, illustriamo il caso in cui l'attività paga dividendi, $\delta \neq 0$. Ricordando che, in equilibrio, $\mu = \alpha + \delta = r + \Phi$, ovvero $\alpha - \Phi = r - \delta$, dalla (24) risulta

$$\mathbb{E}_0^*[P_t] = P_0 e^{(r-\delta)t}.$$

Quindi l'equivalente certo per un'attività che paga dividendi può essere calcolato o utilizzando un tasso di crescita $\alpha - \Phi$, secondo la (24), oppure in base ad un tasso di crescita $r - \delta$.

3.5 Equivalente certo e replicazione (per titoli derivati finanziari)

La soluzione al problema della scelta del tasso per la valutazione delle opzioni, dovuta a Merton [17], Black e Scholes [1], è stata ottenuta riconoscendo che il *payoff* dell'opzione è funzione del solo prezzo dell'azione sottostante. Quindi, si sfrutta la possibilità di *replicare il payoff dell'opzione mediante un'opportuna strategia di portafoglio.* Ricorrendo all'argomento di arbitraggio, il prezzo teorico dell'opzione risulta pari al costo del portafoglio di replicazione. Verificheremo in questa sezione che l'approccio basato sulla replicazione è equivalente al calcolo di un equivalente certo.

Illustreremo l'approccio di replicazione mediante un esempio riferito al caso uniperiodale. Sia data l'opzione con *payoff* secondo l'equazione (11). Ferme restando le ipotesi del CAPM sulla perfezione del mercato finanziario, con un portafoglio costituito da x_1 unità del titolo sottostante e da x_2 unità del titolo a rendimento certo (che per semplicità immagineremo come un titolo con valore facciale unitario), si può ottenere il *payoff* dell'opzione:

$$\begin{cases} P^u x_1 + (1+r)x_2 & = C^u \\ P^d x_1 + (1+r)x_2 & = C^d \end{cases} \tag{25}$$

Quindi, le componenti (x_1, x_2) ricercate sono[21]

$$x_1^* = \frac{C^u - C^d}{P(0)(u-d)} \qquad x_2^* = \frac{C^d u - C^u d}{(u-d)(1+r)}.$$

Poiché in ogni stato il portafoglio ha lo stesso valore dell'opzione allora, per evitare arbitraggi, il prezzo corrente dell'opzione deve essere pari al costo del portafoglio di replicazione: $C(0) = x_1^* P(0) + x_2^*$.

[21]Essendo $P^d < P^d$, la soluzione esiste qualunque sia il vettore di termini noti (C^u, C^d).

Esempio 4. Proseguendo l'esempio 1, si vede che per replicare l'opzione con *payoff* dato in (12) la composizione del portafoglio di replicazione è

$$(x_1^*, x_2^*) = (0.25, -0.694444)$$

ovvero, a fronte dell'acquisto di 0.25 unità del titolo sottostante, ci si finanzia emettendo 0.694444 unità del titolo a rendimento certo.

Allora, il prezzo di non arbitraggio dell'opzione, noti i prezzi del titolo sottostante e del titolo certo, risulta

$$C(0) = 0.25 \times 5 - 0.694444 \times 1 = 0.555$$

come avevamo già visto nell'esempio 1.[22] □

Per derivare la relazione fra l'approccio valutativo basato sulla replicazione e il metodo dell'equivalente certo, basta rileggere l'equazione $C(0) = x_1^* P(0) + x_2^*$ come il calcolo di un valore atteso:

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{C^u - C^d}{P(0)(u-d)} P(0) + \frac{C^d u - C^u d}{(u-d)(1+r)} \\ &= \frac{1}{1+r}\left[C^u \frac{(1+r)-d}{u-d} + C^d \frac{u-(1+r)}{u-d} \right]. \end{aligned}$$

Definendo le pseudo-probabilità

$$q = \frac{(1+r)-d}{u-d} \qquad (1-q) = \frac{u-(1+r)}{u-d} \tag{26}$$

strettamente positive (per le assunzioni fatte inizialmente su d, u e $(1+r)$) e che sommano a uno, possiamo scrivere

$$C(0) = \frac{1}{1+r}\left[C^u q + C^d (1-q) \right] = \frac{\mathbb{E}_0^*[C(1)]}{1+r}. \tag{27}$$

Secondo la formula (27), il valore dell'opzione risulta come valore atteso, calcolato rispetto alle pseudo-probabilità q (e $(1-q)$), e poi scontato al tasso *risk-free*, mediante un approccio neutrale al rischio. Verifichiamo numericamente che q (e $(1-q)$) nella (26) sono proprio le probabilità neutrali al rischio.

Esempio 5. Vogliamo valutare l'opzione data in (12) mediante la tecnica dell'*equivalente certo*, cioè secondo un approccio neutrale al rischio. Dagli esempi 1 e 2, possiamo ricavare

$$q = \frac{1.08 - \frac{12}{20}}{\frac{36}{20} - \frac{12}{20}} = \frac{1.08 - 0.6}{1.8 - 0.6} = 0.4$$

[22] A questo punto, invitiamo il lettore a verificare che il tasso di rendimento dell'opzione risulta

$$\begin{cases} \frac{C^u}{C(0)} - 1 = \frac{1.5}{0.555} - 1 = 1.7 & \text{con probabilità } 1/2 \\ \frac{C^d}{C(0)} - 1 = \frac{0}{0.555} - 1 = -1 & \text{con probabilità } 1/2 \end{cases}$$

e che la sua volatilità è pari a $\sigma_C = 1.35$, come era stato suggerito nell'esempio 1.

e $1 - q = 0.6$. Quindi il prezzo dell'opzione è, in base all'equazione (27),

$$C(0) = \frac{1.5 \times 0.4 + 0 \times 0.6}{1.08} = 0.555$$

come ormai ben noto. □

Dovrebbe essere inoltre evidente il vantaggio di un approccio valutativo basato sull'equazione (27): esso permette di evitare la determinazione del RADR adatto per l'opzione. Per questo motivo, nel seguito ci riferiremo all'approccio neutrale al rischio come all'unico plausibile per la determinazione del prezzo delle opzioni. Inoltre, dovrebbe essere chiaro a questo punto anche l'impossibilità di applicare l'approccio basato sulla replicazione alle opzioni reali, il cui valore deriva dall'andamento del valore di attività reali (cioè non finanziarie), dato che le attività reali sono per loro natura illiquide. Tuttavia, è sempre possibile calcolare l'equivalente certo delle attività reali ogni volta che è possibile determinarne il valore secondo il metodo DCF.

Rimane da discutere il caso in cui la probabilità di neutrale al rischio non sia unica, come visto nell'esempio 3.

Esempio 6. Sia data l'azione con prezzo in $t = 1$

$$P(1) = \begin{cases} 9 & \text{con probabilità } 1/4 \\ 6 & \text{con probabilità } 1/2 \\ 3 & \text{con probabilità } 1/4 \end{cases}$$

e prezzo iniziale $P(0) = 5$. Il tasso *risk-free* sia $r = 8\%$. Sia data inoltre un'opzione *call*, emessa sull'azione, con prezzo di esercizio $k = 7.5$ e scadenza in $t = 1$. Il *payoff* dell'opzione risulta

$$C(1) = \begin{cases} 1.5 & \text{con probabilità } 1/4 \\ 0 & \text{con probabilità } 1/2 \\ 0 & \text{con probabilità } 1/4. \end{cases}$$

Per determinare il prezzo dell'opzione, secondo l'approccio dell'equivalente certo, bisogna determinare la probabilità neutrale al rischio. In base a quanto osservato nell'esempio 3, esistono infinite terne (q_1, q_2, q_3) possibili, ciascuna delle quali determina un diverso prezzo della *call* secondo l'equazione (27). In particolare, il prezzo di non arbitraggio della *call* risulta compreso nell'intervallo $0 < C(0) < 0.555$. □

Nel caso di una molteplicità di probabilità neutrali al rischio ci troviamo nella spiacevole situazione di avere una molteplicità di prezzi (di non arbitraggio) per l'opzione.

Questo succede perché il *mercato finanziario è incompleto*, nel senso che si ha un numero maggiore di situazioni rischiose (nell'esempio, tre stati) rispetto al numero delle attività disponibili per coprirsi dal rischio (nell'esempio, due: attività sottostante e titolo a rendimento certo). Se il mercato è incompleto, allora ci sono titoli derivati il cui *payoff* non si può replicare, e quindi l'approccio basato sulla replicazione diventa inefficace. Si veda l'esempio seguente.

Esempio 7. Secondo i dati dell'esempio 6 e dall'equazione (25) si ha

$$\begin{aligned} 9x_1 + 1.08x_2 &= 1.5 \\ 6x_1 + 1.08x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 1.08x_2 &= 0 : \end{aligned}$$

non esiste nessuna coppia (x_1, x_2) che soddisfa contemporaneamente le tre condizioni. Quindi non è possibile replicare il *payoff* dell'opzione e calcolarne un prezzo semplicemente valutando il portafoglio di replicazione. □

L'impossibilità di replicare è equivalente alla presenza di una molteplicità di probabilità neutrali al rischio.

Chiaramente, l'essere il mercato finanziario incompleto risulta particolarmente fastidioso ai fini della valutazione di un titolo derivato, il cui *payoff* risulta in generale non lineare rispetto al sottostante. Per questo motivo si assume che il mercato finanziario, da cui sono tratte tutte le informazioni rilevati per la valutazione, sia completo, ovvero che sia sempre possibile replicare ogni attività.

A partire dalla prossima sezione, vedremo che questo sarà vero anche parlando di valutazione di attività reali e, a maggior ragione, di opzioni reali.

4 Valutazione di attività reali

Nella valutazione di attività reali è largamente diffuso il metodo DCF, applicato scontando i flussi di cassa prodotti dalle attività mediante un tasso opportunamente scelto per tenere conto del rischio di mercato e dello scudo fiscale offerto dall'indebitamento dell'impresa.

L'utilizzo di questo approccio nasce dall'intento di dare una valutazione di mercato all'attività reale, ovvero il valore che questa ha (o avrebbe, se non ancora acquisita) per gli azionisti correnti. È noto[23] che il principio seguito dal *management* nelle scelte d'investimento aziendale è la massimizzazione di valore per gli azionisti, in quanto, tra tutte le possibili funzioni obiettivo, questa è l'unica compatibile con la sopravvivenza dell'impresa e con le sue finalità istituzionali, ogni altro obiettivo (per esempio, massimizzazione del valore per i clienti o per i dipendenti) privilegiando ottiche di breve periodo.

L'applicazione di questo metodo di valutazione richiede che siano soddisfatte le ipotesi sul mercato finanziario che già sono state introdotte per

[23] Si veda per esempio Rappaport [23], e in italiano, Guatri [10].

la valutazione di attività finanziarie nella sezione 2. Oltre a quelle già menzionate di mercato perfetto e competitivo, in cui sono assenti opportunità (durature) di arbitraggio, si vuole qui sottolineare l'ipotesi di *completezza del mercato finanziario.* Nel caso della valutazione di attività reali, questa ipotesi si sostanzia nella richiesta di disponibilità di un'attività finanziaria comparabile,[24] per trarre da questa le informazioni utili sul corretto premio per il rischio. Se il mercato finanziario fosse incompleto, sarebbe opportuno per gli azionisti includere fra le proprie scelte d'investimento anche le attività reali, in questo violando il cosiddetto *principio di separazione di Fisher*:[25] quindi l'ipotesi di mercato finanziario completo permette la separazione fra le scelte di investimento aziendale e le scelte di investimento degli azionisti. In tal senso, risulta giustificata la valutazione delle attività reali disponibili per l'impresa sulla base del valore attuale dei loro flussi di cassa, anziché sulla base dell'utilità attesa che detti flussi avrebbero per gli azionisti. Insomma, alla base del metodo DCF per la valutazione delle attività reali sta l'ipotesi che il mercato finanziario sia completo.

4.1 Il metodo DCF per le attività reali

Ogni attività reale è caratterizzata da una serie di flussi in entrata e in uscita che si manifestano nel tempo. Per esempio, l'investimento in un impianto produttivo richiede il sostenimento di alcuni flussi finanziari in uscita (costi) per ottenere, da un certo punto in poi, i ricavi legati alla vendita del prodotto.

Consideriamo innanzitutto il caso in cui l'impresa non sia indebitata e sia quindi finanziata solo con capitale proprio. I flussi di cassa netti derivanti dall'attività reale sono definiti come segue:[26]

\+ ricavi dalle vendite
− costo del venduto
− altri costi
= **Reddito prima delle tasse (EBT)**
− oneri fiscali
= **Reddito netto (E)**
− incremento del capitale circolante netto
\+ ammortamenti
= **flusso di cassa netto (C)**.

Una volta determinata la successione dei flussi di cassa netti attesi (che

[24] Ovvero, in modo equivalente, che le attività reali non offrano occasioni d'investimento che non siano già ottenibili investendo nel mercato finanziario.

[25] Si veda Mason e Merton [16].

[26] EBT sta per *Earnings Before Taxes.* L'incremento del capitale circolante netto è pari all'incremento delle scorte di magazzino aumentato dell'incremento dei crediti verso clienti e diminuito dell'incremento dei debiti verso fornitori.

denoteremo con $\{C_t\}$) il valore fondamentale dell'attività (in $t = 0$) risulta

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{\mathbb{E}_0[C_t]}{(1+\mu)^t}, \tag{28}$$

ove T è la durata dell'attività e $\mu = r + \Phi$ è il tasso di rendimento periodale corretto per il rischio determinato sul mercato finanziario in equilibrio per le attività finanziarie i cui flussi di cassa sono comparabili (come tipo di rischio) ai flussi dell'attività reale in esame.[27]

Se si sta valutando la possibilità di investire in un'attività reale il cui valore fondamentale risulta V_0, allora, noto l'ammontare di capitale necessario per l'investimento, indicato con I,[28] in base al principio di massimizzazione del valore per gli azionisti, l'investimento va fatto solo se il *Net Present Value* (NPV), $V_0 - I$, risulta positivo. Infatti, in tal caso il progetto incrementa il valore delle azioni degli azionisti correnti.

4.2 La scelta del premio per il rischio

Una volta determinata la successione dei *cash-flow*, resta da scegliere il premio per il rischio, Φ, adatto all'attività reale in esame. Per questo scopo, tipicamente ci si riferisce al CAPM, e quindi si stima il premio per il rischio a partire dal *beta* di attività reali il cui rischio sistematico risulta paragonabile a quello del progetto in esame. Ricordiamo che l'esistenza di attività finanziarie comparabili con l'attività reale in esame è equivalente all'assunzione di completezza del mercato finanziario.

Data quindi l'attività "gemella", un'attività cioè il cui *cash-flow* risulta perfettamente correlato con il *cash-flow* del progetto da valutare, sia $\bar{\Phi}$ il suo premio per il rischio. Conoscendo la volatilità σ del progetto in esame e la volatilità $\bar{\sigma}$ dell'attività correlata, si determina il premio per il rischio Φ secondo l'equazione

$$\Phi = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \bar{\Phi} \tag{29}$$

determinata a partire dalla condizione $\Phi = \lambda \rho \sigma$ (vedi equazione (8)), per cui il premio per il rischio è commisurato al solo rischio sistematico, ove λ è il prezzo di mercato del rischio.

Normalmente, il premio per il rischio dell'attività "gemella" non viene osservato direttamente, ma risulta implicito nel tasso atteso di rendimento delle azioni della società che detiene quell'attività, la quale, in generale, è finanziata anche con debito. A partire dagli studi di Modigliani e Miller [19, 20], è noto che la deducibilità fiscale degli oneri finanziari costituisce

[27] Nell'ipotesi che il flusso di cassa atteso cresca in base ad un tasso periodale $\alpha < \mu$ e la durata sia illimitata, allora $V_0 = \mathbb{E}_0[C_1]/(\mu - \alpha)$, secondo il modello di Gordon.

[28] Se tale costo è sostenuto in più periodi, si considera il suo valore attuale alla data corrente.

un incentivo all'indebitamento, in quanto la redditività del capitale proprio risulta incrementata dallo scudo fiscale. Inoltre, in base a Hamada [11] e Rubinstein [29], sappiamo che l'indebitamento, aumentando la redditività attesa, incrementa anche il rischio sistematico dell'impresa. Infatti, indicato con β_B il rischio sistematico del debito,[29] la relazione fra l'indice di rischio sistematico delle azioni dell'impresa indebitata (osservato), β_S, e l'indice di rischio sistematico della medesima impresa non indebitata (non osservabile), β_U, risulta

$$\beta_S = \left[1 + (1-\tau)\frac{B}{S}\right]\beta_U - (1-\tau)\frac{B}{S}\beta_B \tag{30}$$

ove τ è l'aliquota fiscale sull'utile dell'impresa, B è il valore (di mercato) del debito e S è il valore (di mercato) delle azioni della società. È evidente come l'equazione (30) possa essere utilizzata per determinare il premio per il rischio per i flussi di cassa dell'attività reale da valutare a partire dall'osservazione di β_S e di β_B per l'attività finanziaria gemella che presenta un rapporto d'indebitamento B/S.

4.3 Valutazione neutrale al rischio per attività reali

Dato che il nostro obiettivo è quello di valutare opportunità che hanno come "sottostante" un'attività reale, dobbiamo estendere l'approccio di valutazione neutrale al rischio, basato sull'equivalente certo, anche alle attività reali. Nella sezione 3 si è illustrata l'equivalenza fra l'approccio DCF basato su RADR e l'approccio neutrale al rischio, per cui quest'ultimo risulta applicabile nella valutazione di attività reali ogni volta che sia applicabile il primo.

Secondo l'approccio dell'equivalente certo, individuata la successione dei flussi di cassa netti $\{C_t\}$, il premio per il rischio Φ di tali flussi di cassa e la probabilità neutrale al rischio, il valore del progetto risulta (riprendendo la notazione presentata nella sezione 4.1)

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{\mathbb{E}_0^*[C_t]}{(1+r)^t}$$

ove con $\mathbb{E}^*[\cdot]$ si intende il valore atteso calcolato secondo la probabilità neutrale al rischio. Si ricorda che, in base a quanto illustrato nella sezione 3.2, l'equivalente certo del flusso di cassa si può determinare anche a partire dal premio per il rischio:[30] $\mathbb{E}_0^*[C_t] = \mathbb{E}[C_t] - \lambda\,\mathrm{Cov}\,[C_t, R_M]$. Inoltre, in base a quanto visto nella sezione 3.4, per calcolare l'equivalente certo di un'attività reale basta "correggere" il suo tasso di crescita, α, per il premio per il rischio, Φ.

[29] Si assume qui che i costi di fallimento siano nulli.

[30] In questa equazione poniamo $\lambda_t = \lambda$ e $R_{M,t} = R_M$

4.4 Finanziamento con debito

Come cambia la valutazione dell'attività reale se essa viene finanziata anche con debito? Innanzitutto si modifica l'entità dei flussi finanziari, in conseguenza della deducibilità degli interessi passivi sul debito. Inoltre, si modifica anche il tasso utilizzato per scontare i flussi, dato che questo deve tenere conto non solo del premio per il rischio operativo dei flussi stessi, ma anche del rischio finanziario.

Nella determinazione dei flussi si devono includere anche gli interessi passivi maturati, periodo per periodo, sul debito. Segnatamente, introducendo la notazione

$$\begin{aligned}
E_t &= \text{reddito operativo netto}\\
B_t &= \text{valore del debito}\\
R &= \text{tasso di rendimento (aleatorio) del debito}\\
\tau &= \text{aliquota fiscale sul reddito}\\
\Delta CC_t &= \text{incremento del capitale circolante netto}\\
A_t &= \text{ammortamento.}
\end{aligned}$$

Assumeremo per semplicità uno schema di tassazione simmetrico per i redditi d'impresa, per cui un utile negativo porta ad un risparmio fiscale.[31] Per ipotesi, i proventi per gli azionisti (sia a titolo di *capital gain* che di dividendo) e per gli obbligazionisti non saranno tassati a livello personale.[32] Inoltre, consideremo la cedola sul debito aleatoria, in quanto soggetta a rischio di credito.

Il flusso di cassa per gli azionisti è pari al reddito netto, $(E_t - RB_{t-1})(1-\tau)$, aumentato delle poste non monetarie (variazione del capitale circolante netto, ΔCC_t, e ammortamento, A_t) e diminuito dal rimborso del prestito, B_{t-1}:

$$(E_t - RB_{t-1})(1-\tau) - \Delta CC_t + A_t - B_{t-1}.$$

Ai creditori spettano gli interessi sul debito residuo e la quota di rimborso del capitale mutuato:[33] $(1+R)B_{t-1}$. La somma di questi flussi costituisce l'ammontare del flusso di cassa generato dalle attività reali, per cui, dopo semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$(E_t - RB_t)(1-\tau) - \Delta CC_t + A_t - B_{t-1} + (1+R)B_{t-1} = C_t + \tau RB_{t-1},$$

ove C_t coincide con il flusso di cassa netto (*free cash flow*) nel caso di attività reali finanziate con il solo capitale proprio.

[31] Pur non essendo vero *tout court*, questo risulta non lontano dalla realtà qualora si consideri la possibilità di portare a nuovo le perdite d'esercizio.

[32] Questo risulta equivalente a supporre che i proventi per gli azionisti e gli obbligazionisti siano tassati alla stessa aliquota.

[33] Quindi, ammettendo la presenza di rischio di credito, seguendo il modello classico di Merton [18], il flusso di cassa del debito risulta $\min\{(1+R)B_{t-1}, V_t\}$, ove V_t è il valore dell'impresa non indebitata.

Secondo un approccio valutativo neutrale al rischio (si veda Sick [31]), il valore dell'attività in presenza di debito risulta

$$W_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{\mathbb{E}_0^*[C_t]}{(1+r)^t} + \tau \sum_{t=1}^{T} \frac{\mathbb{E}_0^*[RB_{t-1}]}{(1+r)^t}$$

ovvero, considerando l'equivalente certo del flusso (rischioso) spettante agli obbligazionisti, $rB_{t-1} = \mathbb{E}_0^*[RB_{t-1}]$,

$$W_0 = V_0 + \tau \sum_{t=1}^{T} \frac{rB_{t-1}}{(1+r)^t} \tag{31}$$

cioè dal valore in ipotesi di finanziamento con il solo capitale proprio aumentato del valore attuale del beneficio fiscale (il cosiddetto "scudo fiscale"). Il modello di valutazione di attività reali in (31) è detto APV (Adjusted Present Value) ed è stato originariamente proposto da Myers [22]. Diversamente da Myers, tuttavia, qui il modello APV è presentato in una versione neutrale al rischio.

In alternativa al modello APV, assumendo costante il rapporto d'indebitamento, $L = B_t/(B_t + S_t) = B/(B + S)$, ove S il valore di mercato delle azioni della società, si può valutare l'attività reale scontandone i flussi di cassa netti, C, in base al *costo medio ponderato del capitale finanziato* (o *Weighted Average Cost of Capital*, WACC). Detto μ_S il tasso di costo del capitale azionario per l'impresa indebitata e r il WACC che denoteremo con w è

$$w = \mu_S(1 - L) + (1 - \tau)\mu_B L,$$

in cui $\mu_S = r + \beta_S(\mu_M - r)$ e $\mu_B = r + \beta_B(\mu_B - r)$ in base alla (6) e β_S dato dalla relazione (30).[34] Allora, il valore dell'attività reale risulta

$$W_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{\mathbb{E}_0[C_t]}{(1+w)^t}.$$

Si deve qui osservare che, nel caso si mantenga il rapporto d'indebitamento costante e in assenza di costi di emissione e di acquisto delle obbligazioni, il debito diventa privo di rischio, dato che al ridursi del valore delle attività si riduce l'indebitamento. Quindi, il modello sopra illustrato dovrebbe correttamente intendersi come un modello in cui il debito è privo di rischio di fallimento. Per ulteriori approfondimenti su questo punto, si veda Brennan [4].

[34] In base al modello di Black e Scholes [1], si possono dare le relazioni che legano il beta delle azioni e delle obbligazioni al beta delle attività reali. A tal proposito, si veda Hsia [13].

Come già visto per il modello APV, anche nel caso in cui la proporzione di debito sia mantenuta costante si può valutare l'attività secondo un approccio neutrale al rischio. In tal senso, Sick [31] ha proposto il seguente modello:

$$W_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{\mathbb{E}_0^* [C_t]}{(1+\rho)^t} \tag{32}$$

ove

$$\rho = r\,(1-\tau L) = r(1-L) + (1-\tau)rL \tag{33}$$

è il tasso certo equivalente al WACC.

5 Limiti dei metodi tradizionali di valutazione

5.1 Caratteristiche degli investimenti reali

In questa sezione presenteremo i limiti delle tecniche tradizionali di *capital budgeting* nel cogliere e valutare alcuni aspetti caratteristici degli investimenti in attività reali. Tali aspetti sono essenzialmente: incertezza, irreversibilità, flessibilità. In particolare:

- l'**incertezza** si può suddividere in *incertezza di mercato*, la quale riguarda le condizioni di mercato del prodotto o dei fattori produttivi del progetto di investimento, e *incertezza tecnica*, che invece concerne gli aspetti tecnici del progetto;

- l'**irreversibilità** (totale o parziale) dell'investimento. In tal senso, i costi fissi d'investimento sono in tutto o in parte sommersi (*sunk costs*) e recuperabili completamente solo se il progetto si dimostra profittevole. La possibilità di recuperare tali costi dismettendo l'attività reale è concessa al più solo parzialmente. L'irreversibilità porta, in condizioni di incertezza, a comportamenti prudenziali e stabilisce una netta demarcazione fra gli investimenti in attività finanziarie, tipicamente liquide (e quindi reversibili), e gli investimenti in attività reali;

- la **flessibilità** consiste nella possibilità di adattare dinamicamente le scelte al mutare delle condizioni ambientali. È abbastanza ovvia l'affermazione che la flessibilità aggiunge valore all'attività reale. Rimane spesso problematico, invece, stabilire con precisione tale valore.

I criteri di *capital budgeting* tradizionali non sono in grado di valutare adeguatamente tali aspetti. Il popolare criterio del NPV, rispetto alle tre caratteristiche elencate sopra, presenta serie difficoltà. Rispetto alla prima, pur valutando l'incertezza mediante l'utilizzo di aspettative sui flussi di cassa e in base ad aggiustamenti del criterio per tenere conto del rischio,[35] non

[35] Ciò avviene o aggiustando il tasso con il premio per il rischio, o aggiustando l'aspettativa dei flussi di cassa, mediante il calcolo dell'equivalente certo. Si vedano le sezioni 4.2 e 4.3.

tiene in nessun conto la presenza di incertezza tecnica (diversificabile) inerente il progetto d'investimento. Inoltre, l'NPV considera le attività reali alla stregua delle attività finanziarie, non valutando adegutamente la caratteristica di irreversibilità che la generalità degli investimenti reali possiede. Infine, pur basato su una rappresentazione degli scenari futuri possibili, l'NPV non prevede la possibilità di modificare il corso delle decisioni. In questo, l'NPV si rivela adatto alla valutazione di un contratto a termine sui futuri flussi di cassa del progetto, piuttosto che di un contratto di opzione. Per tali motivi, l'NPV si è meritato l'appellativo di criterio "statico".

5.2 DTA

Altri metodi di capital budgeting sono stati proposti per tenere conto delle tre caratteristiche sopra elencate. L'analisi basata su alberi decisionali o *Decision Tree Analysis* (DTA) (o ancora analisi per scenari), consente di cogliere in maniera adeguata la presenza della flessibilità nelle attività reali. La DTA consiste essenzialmente nella decomposizione dell'attività reale in varie fasi ordinate gerarchicamente, nella individuazione delle azioni che possono essere intraprese in ogni fase (nodi dell'albero) condizionatamente al verificarsi di certi eventi e nella previsione delle possibili conseguenze di ogni azione (rami). L'individuazione di diversi scenari futuri è importante nella misura in cui resta definita per ciascuno di essi una politica ottimale.

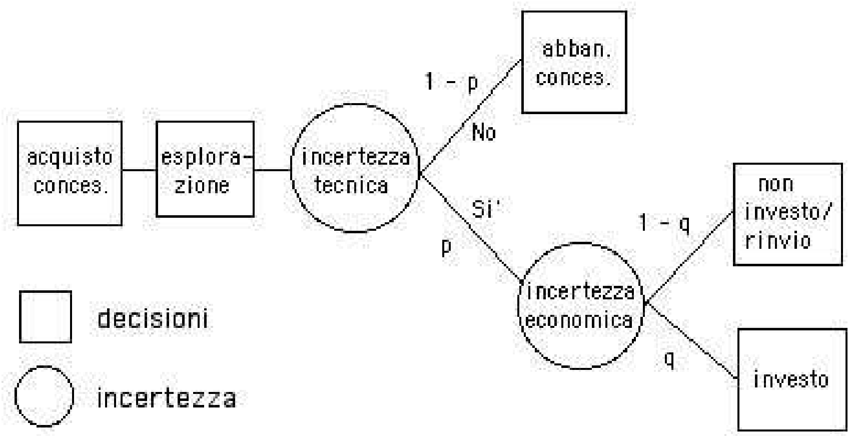

Figura 2: DTA: lo sfruttamento di un giacimento petrolifero.

Per esempio, con riferimento alla figura 2, si dia il caso dell'acquisto di una concessione per l'estrazione del petrolio. In una prima fase si sostiene il costo delle ricerche geologiche per determinare la consistenza del giacimento (nodo iniziale). In tal modo, l'incertezza tecnica si risolverà. Assumiamo per semplicità che gli esiti possibili della ricerca (rami) siano solo due: cioè, che il petrolio ci sia (con probabilità $1-p$), oppure non ci sia (con probabilità

p). Nella seconda fase si sosterrà, condizionatamente ad un esito positivo della ricerca, il costo per l'installazione delle infrastrutture necessarie per l'estrazione. La decisione d'investimento dipenderà dal prezzo del petrolio: il progetto sarà profittevole se il prezzo consentirà di realizzare flussi in entrata il cui valore superi il costo delle infrastrutture. In questo caso, l'incertezza sarà di mercato e le probabilità dei due possibili scenari q e $1-q$ saranno legate al futuro andamento del prezzo del petrolio.

Secondo la DTA, attribuite le probabilità[36] agli eventi (rami) conseguenti ad ogni azione (nodi), il *management* opera perseguendo scenario per scenario la massimizzazione del NPV (calcolato secondo il tasso corretto per il rischio) in ogni nodo. In particolare, nell'esempio in figura 2, denotati con

I_1 il costo del terreno (o della concessione),

I_2 il costo dell'esplorazione geologica,

I_3 il costo delle infrastrutture,

V_t il valore dei flussi di cassa del progetto,

T l'epoca in cui termineranno le esplorazioni geologiche,

Φ il premio per il rischio per tenere conto del solo rischio di mercato (secondo il CAPM o l'APT),

$\mu = r + \Phi$ il tasso aggiustato per il rischio di mercato,

per la decisione di acquisizione della concessione si procede come segue:
il valore del progetto alla data iniziale è

$$\frac{(\mathbb{E}'[V_T] - I_3) \times p \times q}{(1+\mu)^T} - I_2 \tag{34}$$

ove $\mathbb{E}'[V_T]$ è il valore atteso di V_T condizionato all'essere $V_T > I_3$. Si confronta questo valore con il costo I_1 della concessione. Se la differenza risulta positiva, allora si dovrebbe procedere con l'investimento, altrimenti il progetto va rigettato.

L'equazione (34) *presenta un'errore evidente.* Abbiamo utilizzato un premio per il rischio Φ commisurato al rischio sistematico del progetto. Pur non essendo è difficile trovare nel mercato finanziario un'attività quotata che sia comparabile con il progetto in esame, tuttavia il progetto considerato offre anche la possibilità di adattare le proprie scelte future alle circostanze che si verificheranno. Ciò comporta che *l'attività reale assuma un profilo di rischio nettamente diverso da quello dell'attività quotata comparabile.* Infatti, per

[36]Nelle applicazioni, tali probabilità sono già date, magari implicitamente, usando il metodo del NPV, in quanto necessarie per calcolare il valore atteso dei flussi di cassa netti, $\mathbb{E}_0[C_t]$.

effetto della capacità del *management* di limitare le perdite e di giovarsi degli esiti positivi (flessibilità), le distribuzioni di probabilità dei flussi di cassa derivanti dal progetto non sono più quelle originarie, ma risultano "troncate" nella coda sinistra (gli esiti sfavorevoli) e "allungate" nella coda destra (gli esiti favorevoli). Quindi, il tasso di interesse μ scelto per attualizzare i flussi di cassa non può essere lo stesso che useremmo per il progetto "rigido", cioè privato della possibilità di modificare le decisioni future. Quale sia il tasso giusto resta, tuttavia, un problema non risolto dalla DTA. Per meglio comprendere l'importanza di questo punto, svolgiamo il seguente semplicissimo esempio.

Esempio 8. Sia dato un progetto d'investimento il cui costo iniziale è $I = 25$ e il cui esito potrà essere

$$V_1 = \begin{cases} 45 & \text{con probabilità } 1/2 \\ 15 & \text{con probabilità } 1/2 \end{cases}$$

Il premio per il rischio adatto per questo progetto, stimato a partire dai prezzi di un'attività finanziaria comparabile (vedi esempio 2), sia $\Phi = 12\%$, mentre il tasso privo di rischio sia $r = 8\%$ per cui il RADR è $\mu = 20\%$. Come già sappiamo, dato che $V_0 = (45 \times 1/2 + 15 \times 1/2)/(1.2) = 25$ il NPV risulta $V_0 - I = 0$ e quindi il progetto non dovrebbe essere intrapreso. Si desidera stipulare un contratto di copertura assicurativa completa sull'esito finale del progetto. In particolare, il flusso di cassa del contratto di assicurazione risulta

$$P_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } V_1 = 45 \\ 30 & \text{se } V_1 = 15. \end{cases}$$

Per determinare il valore di tale contratto, basta calcolare l'incremento di valore che il progetto d'investimento subisce per effetto delle copertura. Con la copertura assicurativa, il valore del progetto risulta

$$V_0' = \frac{((45 + 0) \times 1/2 + (15 + 30) \times 1/2)}{1.08} = 41.67.$$

Si nota che il flusso di cassa complessivo derivante dalla combinazione dell'investimento e della copertura assicurativa è certo, e quindi va scontato al tasso privo di rischio, $r = 0.08$. Con la copertura completa il progetto diventa appetibile in quanto presenta NPV positivo. Il massimo prezzo che si potrà pagare per la copertura sarà quindi $V_0' - V_0 = 41.67 - 25 = 16.67$.

Ma che succede se la copertura, anziché essere completa, è solo parziale? Ad esempio, sia

$$P_1' = \begin{cases} 0 & \text{se } V_1 = 45 \\ 20 & \text{se } V_1 = 15. \end{cases}$$

una diversa alternativa assicurativa. Quanto si dovrebbe pagare questo contratto? Per il calcolo del valore complessivo si ha

$$V_0'' = \frac{((45+0)\times 1/2 + (15+20)\times 1/2)}{1+\mu'}$$

ma qual è il tasso, μ', che si dovrebbe correttamente utilizzare? Di sicuro né $r = 8\%$, né $\mu = 20\%$ sono adatti, in quanto il progetto complessivamente inteso non è privo di rischio e ha un rischio sistematico diverso da quello del progetto senza la copertura parziale. □

L'esempio appena svolto rende evidente il limite fondamentale della DTA, evidenziato nell'equazione (34): pur essendo essa in grado di analizzare la flessibilità manageriale (la quale concretizza una parziale "copertura assicurativa"), è inadatta a valutarla. Probabilmente, il lettore attento ricorderà che le opzioni finanziarie hanno, sulla distribuzione del prezzo del titolo sottostante, esattamente lo stesso effetto della flessibilità manageriale o della copertura assicurativa e ricorderà anche che per valutarle correttamente bisogna ricorrere al concetto di equivalente certo e alla valutazione neutrale al rischio.

Il contributo della teoria delle opzioni reali è proprio questo: *fornire una maniera per valutare la flessibilità manageriale.*

6 Opzioni reali (semplici)

6.1 Introduzione

In questa sezione introdurremo le più semplici opzioni reali e una adeguata metodologia per la loro valutazione. Lo scopo è quello di preparare il terreno per la sezione successiva, in cui affronteremo la valutazione di attività reali che presentano molteplici opportunità.

6.2 L'opzione di differimento di un investimento

Iniziamo parlando dell'opzione di differimento di un investimento, ovvero della possibilità di scegliere il momento migliore in cui intraprendere un investimento. È il caso più semplice, dato che assomiglia alla valutazione di un'opzione finanziaria di tipo *call*.

Si[37] consideri un'opportunità di investimento, con costo (sommerso) $I = 16$, che può essere intrapresa al tempo corrente ($t = 0$) o fra un anno ($t = 1$) e che sarà finanziata interamente con capitale proprio. Si assume che da tale attività deriverà in perpetuo un flusso di cassa annuo $\{C_t\}$.

Dato che procederemo alla valutazione secondo l'*approccio neutrale al rischio* per evitare le difficoltà emerse nell'esempio 8, non considereremo la

[37] L'esempio è preso a prestito da Dixit e Pindyck [9].

distribuzione di probabilità oggettiva di $\{C_t\}$, ma utilizzeremo direttamente la *probabilità neutrale al rischio*, che avremo opportunamente derivato secondo quanto svolto nella sezione 3.3. Ciò detto, nell'istante corrente il flusso di cassa (se l'investimento fosse intrapreso immediatamente) sia $C_0 = 2$ e alla fine del primo anno C_1 può assumere i valori

$$C_1 = \begin{cases} 3 & \text{con probabilità } 1/2 \\ 1 & \text{con probabilità } 1/2; \end{cases}$$

infine, C_t per $t = 2, 3, \ldots$, rimane costante al livello raggiunto al tempo $t = 1$ (vedi figura 3). Il tasso per gli investimenti privi di rischio sia $r = 10\%$. Inoltre, nella valutazione dell'investimento, si segua il consueto principio di razionalità economica per cui l'investimento viene intrapreso perseguendo la *massimizzazione* del valore dell'azienda, ovvero la massimizzazione del NPV.

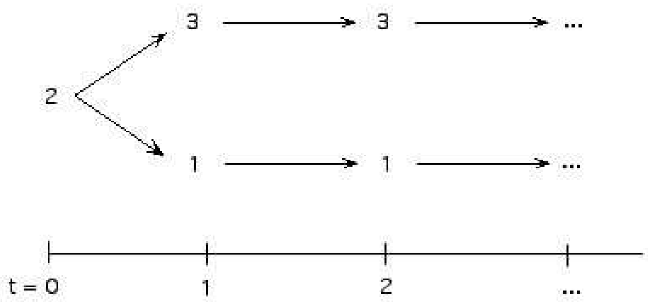

Figura 3: Flusso di cassa.

Se si investe in $t = 0$, si ha $V_0 = V(C_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^*[C_t]/(1+r)^t = 2 + 2/0.1 = 22$ e quindi $\text{NPV}_0 = V_0 - I = 6$. Se invece si rinviasse la decisione a $t = 1$, dato che l'investimento verrebbe intrapreso nel solo caso in cui il flusso di cassa vale 3 con un valore fondamentale $V(3) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}^*[C_1]/(1+r)^{(t-1)} = 3 + 3/0.1 = 33$ (nell'altro caso, $V(1) = 1 + 1/0.1 = 11$ e il NPV risulterebbe negativo) si avrebbe:

$$\text{NPV}(C_1) = \begin{cases} V(3) - I & \text{c.p. } 1/2 \\ 0 & \text{c.p. } 1/2 \end{cases} = \begin{cases} 17 & \text{c.p. } 1/2 \\ 0 & \text{c.p. } 1/2 \end{cases}$$

e quindi il valore atteso attualizzato in $t = 0$ risulterebbe

$$\frac{\mathbb{E}_0^*[\text{NPV}(C_1)]}{1+r} = \left(17 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2}\right) \frac{1}{1.1} = 7.73.$$

Come si vede, il NPV è maggiore in questo secondo caso. Quindi, nell'intento di massimizzare il valore, è preferibile rinviare la decisione. La differenza tra il valore che emerge dalla strategia di rinvio e il valore dato dalla strategia di investimento immediato (pur possibile) dà il valore dell'opportunità di differimento dell'investimento: $7.73 - 6 = 1.73$. Questa differenza (sempre positiva), è detta *valore dell'opzione di differimento dell'investimento* ed è indicata con $\mathrm{ROV}(C_0)$, ove ROV sta per *Real Option Value*.

Sia $F(C)$ il valore dell'opportunità di investimento comprensiva della flessibilità di differimento dell'inizio del progetto, in funzione del flusso di cassa, C. Allora, il valore complessivo dell'opportunità di investimento nel progetto è pari al *payoff* del progetto più il valore dell'opzione di differimento ed è il maggiore tra i valori delle due strategie:[38]

$$\begin{aligned} F(C_0) &= \mathrm{NPV}(C_0) + \mathrm{ROV}(C_0) = \\ &= \max\left\{ V(C_0) - I, \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_0\left[\mathrm{NPV}(C_1)\right] \right\} \end{aligned} \tag{35}$$

e $F(C_0) = 7.73$.

Non si deve dimenticare che stiamo qui considerando il caso di attività reale finanziata interamente con capitale proprio. In base a quanto descritto nella sezione 4.4, è tuttavia abbastanza semplice estendere il modello di valutazione al caso di attività finanziata anche con debito, purché sia chiaro lo schema seguito nel finanziamento. Se l'attività viene finanziata (all'epoca in cui l'investimento viene attuato) con l'obiettivo di mantenere poi una proporzione costante di debito, $L = B_t/V_t = B/V$, allora nella equazione (35) si deve sostituire V_t con W_t in base alla (32) e il tasso privo di rischio, r, con ρ secondo la (33). Se invece l'attività viene finanziata all'epoca in cui l'investimento viene attuato con un ammontare di debito prefissato, allora nella (35) si deve semplicemente rimpiazzare V_t con W_t secondo la (31).

6.3 L'opzione di differimento in un contesto multiperiodale

Riprendiamo l'esempio di scelta del momento migliore per attuare l'investimento in un contesto più generale, sempre considerando un approccio valutativo neutrale al rischio con un tasso *risk-free*, $r > 0$.

L'attività provvede un flusso di cassa annuo, $\{C_t\}$, la cui dinamica in base alla *probabilità neutrale al rischio* sia

$$C_{t+1} = \begin{cases} C_t u & \text{con probabilità } p \\ C_t d & \text{con probabilità } 1-p \end{cases} \tag{36}$$

per $t = 0, \ldots, T$ e C_0 fissato. A differenza del caso precedente, qui l'incertezza sul flusso di cassa annuo perdura per T anni.

[38] Per avere una formula di valutazione valida anche quando $\mathrm{NPV}(C_0) < 0$, dobbiamo sostituire nella (35) $\mathrm{NPV}(C_t)$ con il maggiore tra $\mathrm{NPV}(C_t)$ e 0: $\max\{\mathrm{NPV}(C_t), 0\}$.

Poiché la produzione avverrà per sempre, il valore del progetto, V, risulta pari al valore attuale dei profitti futuri:

$$V_t = V(C_t) = \sum_{s=t}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}_t^* [C_s]}{(1+r)^{s-t}} = \sum_{s=t}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}_t [C_s]}{(1+\mu)^{s-t}}. \tag{37}$$

Il costo sia I e l'opportunità di investimento in questo progetto sia garantita fino all'epoca T, nel senso che il decisore si trova in una posizione protetta[39] per cui nessun altro può attuare il medesimo progetto prima dell'epoca T.

Si supponga che il decisore non faccia nulla fino a T. In $t = T$, l'unica strategia possibile è investire se $V_T > I$ oppure abbandonare il progetto nel caso opposto. Il *valore dell'opportunità di investimento nel progetto* all'epoca T, indicato con $F_T(C_T)$, dipende da C_T ed è $F_T = V(C_T) - I$ nel caso favorevole e $F_T = 0$ in quello sfavorevole:

$$F_T(C_T) = \max\{V(C_T) - I, 0\}.$$

All'epoca $t = T - 1$ il decisore ha due alternative: sulla base del prezzo prevalente in quel momento, può decidere di attendere e allora il valore dell'opportunità d'investimento a quell'epoca è il valore attuale atteso di $F_{T-1}(C_T)$ in $t = T - 1$:

$$F_{T-1}(C_{T-1}) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{T-1}^* [F_T(C_T)] = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{T-1}^* [\max\{V(C_T) - I, 0\}];$$

se invece decide di investire in $t = T - 1$, il valore dell'opportunità di investimento è

$$F_{T-1}(C_{T-1}) = V(C_{T-1}) - I.$$

Poiché il decisore intende massimizzare il valore, l'opportunità di investimento in $t = T - 1$ vale

$$F_{T-1}(C_{T-1}) = \max\left\{V(P_{T-1}) - I, \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{T-1}^* [F_T(C_T)]\right\}.$$

È evidente, a questo punto, che, procedendo ricorsivamente all'indietro, nelle epoche $t = T - 2, T - 3, \ldots, 1, 0$ si ha lo stesso problema visto per $t = T - 1$. Quindi, in generale, il valore dell'opportunità di investimento nel progetto è

$$F_t(C_t) = \max\left\{V(C_t) - I, \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_t^* [F_{t+1}(C_{t+1})]\right\} \quad t = 0, \ldots, T-1. \tag{38}$$

Dall'analisi dell'equazione (38) si evidenziano due fasi in ogni passo del processo decisionale:

[39] Per chiarezza, può essere utile pensare alla protezione offerta da un monopolio, da un brevetto oppure da una concessione governativa.

a) la decisione in t se attendere o investire, riflessa dalla scelta del maggiore tra $V_t - I$ e $\mathbb{E}_t\left[F_{t+1}(C_{t+1})\right]/(1+r)$;

b) la scelta futura, valutata da F_{t+1}, nell'ipotesi che in $t+1$ (e in tutte le date successive) il decisore decida in maniera ottimale.

Confrontando F_t con $\Omega_t(C_t) = \max\{V(C_t) - I, 0\}$ si determina il valore dell'opzione di differimento dell'investimento,

$$ROV_t = F_t(C_t) - \Omega_0(C_t) \geq 0. \tag{39}$$

Il valore dell'opzione di differimento risulta *strettamente positivo* se è più conveniente aspettare ed è *nullo* se è ottimale investire: in effetti, in quest'ultimo caso, non si aggiungerebbe alcun valore all'investimento rinviando ancora.

A conclusione di questa parte, forniamo un esempio numerico di valutazione dell'opzione di differimento in un contesto multiperiodale, determinando anche la politica ottimale di esercizio dell'opportunità.

Esempio 9. Sia data un'attività reale i cui flussi di cassa siano aleatori. La dinamica dei flussi di cassa può essere rappresentata mediante un albero binomiale con i parametri indicati nella tabella 1. Assumiamo che l'investimento sia finanziato esclusivamente con capitale proprio.

Tabella 1: Opzione di differimento: parametri

C_0	valore iniziale	3	
u	fattore di rialzo	1.49	
d	fattore di ribasso	0.67	
p	probabilità di rialzo (risk-neutral)	0.3419	
I	costo dell'investimento	50	
T	maturità dell'opzione	3	(anni)
r	tasso risk-free	0.05	
Δt	passo temporale	1	(anno)

I parametri nella tabella 1 si possono pensare come derivanti dalle seguenti ipotesi sull'attività reale: tasso annuo di crescita attesa dei *cash-flow* $\alpha = 0.15$, volatilità annua dei *cash-flows* $\sigma = 0.4$, prezzo di mercato del rischio $\lambda = 1$, coefficiente di correlazione lineare con il portafoglio di mercato $\rho = 0.25$. Infatti, dato che il tasso di crescita del flusso di cassa atteso su base annua è $\alpha = 0.15$ rispetto alla probabilità oggettiva, e il premio per il rischio $\Phi = 0.1$ (calcolato in base alla (8b) tenendo conto di $\lambda = 1$, $\rho = 0.25$ e una volatilità $\sigma = 0.4$), allora, secondo l'equazione (24), il tasso di crescita al netto del premio per il rischio (ovvero il tasso di crescita secondo le probabilità neutrali al rischio) risulta $\hat{\alpha} = \alpha - \Phi = -0.05$. Allora, il parametro di rialzo è $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.491825 \approx 1.49$, $d = 1/u$ e la probabilità neutrale al rischio è $p = (m-d)\,/\,(u-d) = 0.3419$, ove $m = e^{\hat{\alpha}\sqrt{\Delta t}}$. Infatti, in base a tale probabilità,

$$\log\left(\frac{\mathbb{E}_t^*\left[C_{t+\Delta t}\right]}{C_t}\right) = \log\left(u \times p + d \times (1-p)\right) = -0.05 = \hat{\alpha}\Delta t$$

confermando il dato sul tasso atteso annuo di crescita al netto del premio per il rischio.

L'attività reale abbia durata illimitata.[40] Entro l'epoca T si deve decidere se investire in tale attività. Il costo dell'investimento sia I. Sviluppiamo l'analisi assumendo che la decisione d'investimento sia considerata una volta all'anno: $\Delta t = 1$.

Per la valutazione dell'opzione di differimento, iniziamo calcolando il valore dell'attività reale, come valore atteso scontato dei flussi di cassa futuri. La tabella 3 presenta tale valore in corrispondenza dei vari stati futuri per C_t, in applicazione dell'equazione (37). Nella tabella 3 abbiamo denotato con $V_{t+\Delta t}^{+}$ il valore dell'attività in conseguenza di un rialzo di C_t rispetto al valore presente, e con $V_{t+\Delta t}^{-}$ il valore conseguente ad un ribasso. Come si vede, il NPV alla data corrente ($t = 0$) risulta negativo (NPV $= 47.15 - 50 < 0$). Successivamente, calcoliamo il valore dell'opzione di differimento, applicando ricorsivamente le equazioni (38), come presentato nella tabella 4. Il valore corrente risulta $F(0, C_0) = 12.88$. Risulta interessante determinare anche la politica ottimale di investimento, contingente al verificarsi di certi valori per il *cash-flow*. Nella tabella 5 presentiamo la decisione ottimale rispetto al valore di C_t. In base a quanto suggerito dall'equazione (39), si investe solo in corrispondenza degli stati in cui ROV $= 0$. □

t	0	1	2	3	4	5	6
C_t	3	4.48	6.68	9.96	14.86	22.17	33.07
		2.01	3	4.48	6.68	9.96	14.86
			1.35	2.01	3	4.48	6.68
				0.90	1.35	2.01	3
					0.61	0.90	1.35
						0.41	0.61
							0.27

Per il calcolo di C_t si applica ricorsivamente la formula $C_{t+1} = \begin{cases} C_t \times u \\ C_t \times d \end{cases}$

Tabella 2: Albero binomiale del flusso di cassa

[40] È tuttavia immediato estendere l'esempio al caso in cui la durata del progetto sia finita.

t	0	1	2	3	4	5	6
V_t	47.15	72.80	112.64	174.70	271.62	423.32	661.39
		32.71	50.61	78.50	122.05	190.21	297.18
			22.74	35.27	54.84	85.47	133.53
				15.85	24.64	38.40	60
					11.07	17.26	26.96
						7.75	12.11
							5.44

Per il calcolo di V_t si applicano ricorsivamente le relazioni

$$V_T = \frac{C_T}{r} \quad \text{per } t = T \text{ e} \quad V_t = C_t + \frac{pV^+_{t+\Delta t} + (1-p)V^-_{t+\Delta t}}{e^{r\Delta t}} \quad \text{per } t < T.$$

Tabella 3: Albero binomiale del valore dell'attività reale

t	0	1	2	3	4	5	6
$F(t, V_t)$	12.88	28.87	62.64	124.70	221.62	373.32	611.39
		5.58	13.56	31.93	72.05	140.21	247.18
			1.87	5.08	13.57	35.47	83.53
				0.34	1.06	3.25	10
					0	0	0
						0	0
							0

$$F(T, V_T) = \max\{V_T - I, 0\}$$

per $t = T$ e

$$F(t, V_t) = \max\left\{V_t - I, \frac{\left[pF\left(t+\Delta t, V^+_{t+\Delta t}\right) + (1-p)F\left(t+\Delta t, V^-_{t+\Delta t}\right)\right]}{e^{r\Delta t}}\right\}$$

per ogni $t < T$.

Tabella 4: Valore dell'opzione di differimento dell'investimento

t	0	1	2	3	4	5	6
Politica	Rinvio	Rinvio	Invest.	Invest.	Invest.	Invest.	Invest.
		Rinvio	Rinvio	Rinvio	Invest.	Invest.	Invest.
			Rinvio	Rinvio	Rinvio	Invest.	Invest.
				Rinvio	Rinvio	Rinvio	Invest.
					Rinvio	Rinvio	Rinvio
						Rinvio	Rinvio
							Rinvio

"Rinvio" quando ROV > 0, "Investimento" quando ROV $= 0$.

Tabella 5: Politica ottimale d'investmento

7 Progetti con opzioni reali multiple

7.1 Introduzione

Nella sezione precedente si è proposto un metodo per modellare e valutare la flessibilità manageriale nel caso di scelta del tempo ottimo in cui dar corso ad un nuovo investimento. Questo semplice caso può essere usato come utile paradigma per la valutazione di altre opportunità manageriali insite nelle attività reali, quali le opzioni di espansione, di contrazione dell'attività in essere, oppure l'opzione di sostituzione dell'attività corrente con una diversa.

Tuttavia, questa analisi non sarebbe soddisfacente per la valutazione di attività reali perché nei casi concreti le opportunità non si presentano mai da sole, ma piuttosto insieme e con varie forme di interdipendenza fra loro. A titolo di esempio, dopo aver esercitato l'opzione d'investimento in una nuova attività, si possono presentare altre opportunità, quali la variazione della scala operativa e dello scopo dell'investimento iniziale, ovvero la possibilità di cambiare l'attività o di interromperla. In alcuni casi, anche lo stesso processo di investimento può essere soggetto a varie opzioni, quali la possibilità di procedere gradualmente per stadi anziché in un'unica soluzione. Infine, non si deve dimenticare che solo raramente un'azienda detiene opzioni su un'unica attività, ma dispone di opzioni su attività diverse da quella in essere.

Anche solo dopo un'analisi superficiale, si dovrebbe capire che il valore di un "portafoglio" di opzioni, non è semplicemente la somma dei valori delle singole opportunità ciascuna valutata indipendentemente dalle altre. Infatti, per rimanere agli esempi precedenti, l'opportunità di abbandono o di espansione dell'attività hanno senso se prima è stata esercitata l'opportunità di investimento. L'interazione fra opzioni reali impatta anche sul loro valore: è evidente infatti che il valore dell'opzione di abbandono o di espansione deve influenzare il valore della stessa opportunità di investimento, dato che da essa conseguono.

Nel seguito, individueremo e descriveremo alcune situazioni elementari di interazione fra opzioni reali con lo scopo di studiare, a partire da tali situazioni, problemi più complicati. Questo approccio risulta adatto per un'ampia classe di problemi di valutazione. Le situazioni che analizzeremo sono: la composizione di opzioni (sezione 7.2), la somma di opzioni reali strategicamente indipendenti (sezione 7.3), la scelta della migliore fra più opzioni reali mutuamente esclusive (sezione 7.4).

7.2 Opzioni reali composte

È la situazione in cui l'esercizio di ciascuna opportunità offre un'opzione ulteriore. Esempi di questa situazione possono essere: progetti d'investimento sequenziale, in cui il costo dell'investimento è suddiviso in più *tranche*; progetti pilota, intrapresi soprattutto per le informazioni che portano sull'investimento principale; opportunità di variazione della scala e dello scopo del progetto, conseguenti all'investimento iniziale.

Per la valutazione delle *opzioni composte* si deve considerare che all'esercizio dell'opzione precedente, non solo se ne percepisce il *payoff*, ma si "acquista" anche il valore dell'opzione successiva. Per semplicità, considereremo il caso in cui siano disponibili due sole opzioni. Come si vedrà, questa non è una limitazione, dato che l'argomento è di natura ricorsiva e quindi estendibile a casi con una molteplicità di opzioni composte.

Formalmente, sia $\{V_t\}$ il valore (fondamentale) di un'attività reale e siano date due opzioni su di essa: una prima opzione di rinvio della decisione d'investimento, con "valore intrinseco" (se considerata da sola) $\pi_1(t, V_t) = \max\{e_1 V_t - I_1, 0\}$, ove I_1 è il costo dell'investimento ed e_1 un fattore di espansione, e maturità T_1. Questa prima opzione, se esercitata, concede al decisore un'opportunità di espansione della medesima attività. Sia $\pi_2(t, V_t) = \max\{e_2 V_t - I_2, 0\}$ il "valore intrinseco" di tale opzione, ove e_2 denota un fattore di espansione incrementale dell'attività,[41] e sia $T_2 \geq T_1$ la maturità. Per costruzione, la possibilità di espansione può essere esercitata successivamente all'esercizio della prima opzione ed entro T_2.

È immediato constatare che, benché la prima opzione abbia il *payoff* descritto sopra, il suo valore intrinseco deve tenere conto anche del valore della seconda. Quindi, una volta calcolato il valore dell'opzione successiva per ogni possibile stato e data di esercizio della prima opzione (come se la prima opzione fosse già stata esercitata), si procede al calcolo del valore dell'opzione precedente. Si indichi con $F_2(t, V_t)$ il valore dell'opzione successiva in seguito all'esercizio dell'opzione precedente, e con $F_1(t, V_t)$ il valore dell'opzione precedente.[42] Il valore intrinseco dell'opzione precedente è quindi $\pi_1(t, V_t) = \max\{e_1 V_t - I_1 + F_2(t, V_t), 0\}$.

Tabella 6: Opzioni composte: parametri

e_i	fattore di espansione	0.5	i=1,2
I_i	costo dell'investimento	80	i=1,2
T_1	maturità prima opzione	3	(anni)
T_2	maturità seconda opzione	5	(anni)
r	tasso risk-free	0.05	
Δt	passo temporale	1	(anno)
u	fattore di rialzo	1.49	
d	fattore di ribasso	0.67	
p	probabilità di rialzo (risk-neutral)	0.3375	
V_0	valore iniziale	100	

[41] Ad esempio, se con la prima opzione si è acquisita l'intera attività sottostante, $e_1 = 1$, e con la seconda la si incrementa del 50%, allora $e_2 = 0.5$.

[42] Ovviamente, se $t > T_1$ il valore dell'opzione precedente è $F_1(t, V_t) = 0$, in quanto tale opportunità non esiste più.

Il progetto è rappresentato graficamente nella figura 4, ove si sono indicate con esagoni le opzioni disponibili ed in cui l'opzione a sinistra è la premessa necessaria dell'opzione a destra. I parametri sono dati nella tabella 6.

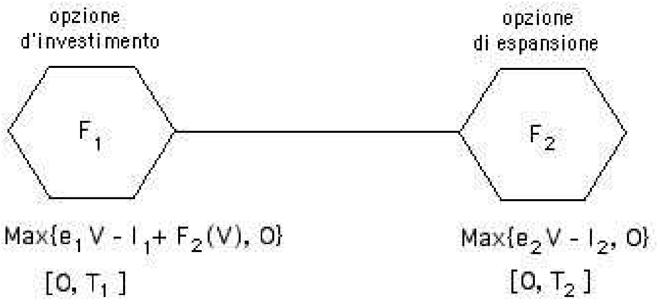

Figura 4: Composizione di opzioni.

La dinamica aleatoria dell'attività sottostante (cioè l'insieme degli scenari futuri rilevanti per la decisione d'investimento) è descritta nella tabella 7.

t	0	1	2	3	4	5
V_t	100	149.18	222.55	332.01	495.30	738.91
		67.03	100	149.18	222.55	332.01
			44.93	67.03	100	149.18
				30.12	44.93	67.03
					20.19	30.12
						13.53

Per il calcolo di V_t si applica ricorsivamente la formula $V_{t+1} = \begin{cases} V_t \times u \\ V_t \times d \end{cases}$

Tabella 7: Albero binomiale del valore dell'attività reale

Per la valutazione, si procede come indicato sopra. I calcoli sono presentati nella tabella 8.[43]

Il valore dell'opzione di investimento, F_1, si ottiene applicando il medesimo principio. I calcoli sono presentati nella tabella 9.

Quindi $F_1(0, V_0) = 7.32$ è il valore netto dell'attività comprensivo sia del valore dell'opportunità di investimento che dell'opportunità di espandere, successivamente, l'attività.

[43]Se l'opzione successiva potesse essere esercitata solo in un sottointervallo $[T, T_2]$, con $T > 0$ dato, allora, per ogni $t < T$ il valore dell'opzione successiva risulterebbe

$$F_2(t, V_t) = \mathbb{E}_t^* \left[F_2(T, V_T)\right] e^{-r(T-t)},$$

cioè, dall'attualizzazione del valore atteso dell'opzione all'epoca T.

t	0	1	2	3	4	5
$F_2(t, V_t)$	4.80	12.93	33.94	86.01	167.65	289.45
		1.03	3.22	10.04	31.28	86.01
			0	0	0	0
				0	0	0
					0	0
						0

Per il calcolo di F_2 si applicano ricorsivamente le formule

$$F_2(T_2, V_{T_2}) = \max\{e_2 V_{T_2} - I_2, 0\}$$

per $t = T_2$ e

$$F_2(t, V_t) = \max\left\{e_2 V_t - I_2, \frac{[pF_2(t + \Delta t, V_t u) + (1-p)F_2(t + \Delta t, V_t d)]}{e^{r\Delta t}}\right\}$$

per $t < T_2$.

Tabella 8: Valore dell'opzione di espansione

t	0	1	2	3
$F_1(t, V_t)$	7.32	21.87	65.22	172.01
		0.48	1.49	4.63
			0	0
				0

$$F_1(T_1, V_{T_1}) = \max\{e_1 V_{T_1} - I_1 + F_2(T_1, V_{T_1}), 0\}$$

per $t = T_1$ e

$$F_1(t, V_t) =$$
$$= \max\left\{e_1 V_t - I_1 + F_2(t, V_t), \frac{[pF_1(t + \Delta t, V_t u) + (1-p)F_1(t + \Delta t, V_t d)]}{e^{r\Delta t}}\right\}$$

per ogni $t < T_1$.

Tabella 9: Valore dell'opzione d'investimento

Può essere interessante misurare il contributo di ciascuna opzione al valore complessivo del progetto. Per fare questo, consideriamo prima il progetto composto dalla sola opzione di investimento. Il valore ottenuto, indicato con $F_1'(0, V_0)$, per differenziarlo dal valore dell'opzione composta, risulta 3.22. Il valore della seconda opzione è dato dall'incremento del valore complessivo del progetto per la presenza dell'opportunità di espansione. In tal senso, il valore della seconda opzione condizionato all'esercizio della prima, denotato $F_2'(0, V_0)$ per differenziarlo dal valore calcolato in precedenza, è 4.09, secondo l'equazione $F_2' = F_1 - F_1'$, pari al valore della seconda opzione è la differenza fra il valore del progetto complessivo e il valore della prima opzione considerata da sola.

È a questo punto immediata l'osservazione che il valore dell'opzione composta non risulta uguale alla somma dei valori delle due opzioni (di investimento e di espansione) valutate singolarmente. Se si valutasse l'opzione di espansione indipendentemente dall'opzione di investimento, si otterrebbe $F_2''(0, V_0) = 4.80$. L'opzione d'investimento, come abbiamo visto sopra, ha valore $F_1'(0, V_0) = 3.22$. Quindi, la loro somma è $F_2''(0, V_0) + F_1'(0, V_0) = 8.03$: *il valore dell'opzione composta non è uguale alla somma dei valori delle due opzioni considerate indipendentemente l'una dall'altra*. La differenza è attribuibile all'interazione fra le due opzioni. La mancata considerazione della dipendenza fra le due opzioni può far commettere errori rilevanti: in questo caso l'errore è circa del 10%!

7.3 Opzioni reali indipendenti

In questa sezione ci occuperemo di opzioni fra loro indipendenti e contemporaneamente disponibili al *management*. È questa la situazione che si verifica quando si ha possibilità di esercitare più opzioni tra loro strategicamente (ma non necessariamente anche stocasticamente) indipendenti, nel senso che l'esercizio di ciascuna di esse non influenza la possibilità di esercitare le altre. Si pensi al lancio di un nuovo prodotto in più aree geografiche: se si può introdurre tale prodotto in ciascuna area indipendentemente dal lancio nelle altre aree, allora si dispone di un portafoglio di opzioni di investimento tra loro indipendenti e tutte esercitabili. Lo stesso si può dire se si ha il brevetto di un prodotto che può essere impiegato per usi diversi (e non alternativi). Il caso più generale, tuttavia, è quello in cui la stessa impresa ha progetti d'investimento in *business* diversi. In questo caso si può a ragione parlare di un portafoglio di opzioni d'investimento.

Come nella sezione precedente, discuteremo per semplicità il caso in cui siano disponibili *solo* due opzioni fra loro indipendenti, l'estensione ad un numero maggiore essendo immediata. Formalmente, siano dati $\{V_t^i\}$, per $i = 1, 2$, valori delle attività reali in oggetto. Siano

$$\pi_1(t, V_t^1) = \max\{V_t^1 - I_1, 0\} \quad \text{e} \quad \pi_2(t, V_t^2) = \max\{V_t^2 - I_2, 0\}$$

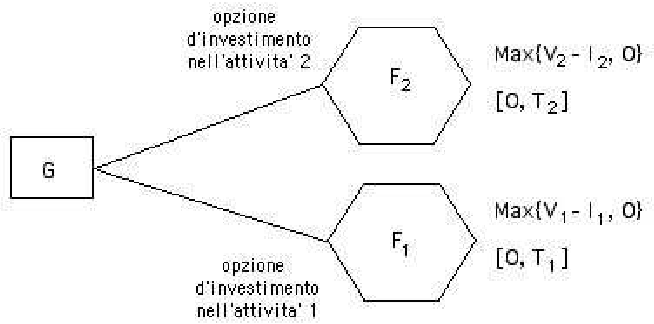

Figura 5: Opzioni indipendenti.

i valori intrinseci delle due opzioni d'investimento, con maturità rispettivamente T_1 e T_2. Si veda la figura 5 per una rappresentazione del problema. Ci proponiamo di determinare il valore di tali opzioni, indicati con $F_i(t, V_t^i)$, $i = 1, 2$, e il valore congiunto del portafoglio di opzioni con $G(t, V_t^1, V_t^2)$. Risulta (*additività del valore di opzioni indipendenti*)

$$G(t, V_t^1, V_t^2) = F_1(t, V_t^1) + F_2(t, V_t^2) \tag{40}$$

per ogni possibile terna (t, V_t^1, V_t^2). Per chiarezza, i parametri del problema in esame sono dati nella tabella 10.[44]

Prima di calcolare il valore di opzioni date ciascuna su una sola attività, e dato che ciascuna opportunità dipende da una sola attività, osserviamo che per i nostri scopi bastano le probabilità marginali per ciascuna attività, anziché le probabilità congiunte assegnate nella tabella 10.[45] Infatti, il processo a tempo discreto per l'attività i-esima è

$$V_{t+1}^i = \begin{cases} V_t^i u_i & \text{con probabilità } p_i \\ V_t^i d_i & \text{con probabilità } 1 - p_i \end{cases} \qquad t = 0, \ldots, n-1.$$

ove $p_i = p_i(V_t^i)$ è la probabilità marginale di rialzo, $i = 1, 2$. Quindi

$$p_1 = p_{uu} + p_{ud} = 0.3696 \qquad \text{e} \qquad 1 - p_1 = p_{du} + p_{dd} = 0.6304$$

sono rispettivamente le probabilità di ribasso e di rialzo del valore della prima attività e

$$p_2 = p_{uu} + p_{du} = 0.4750 \qquad \text{e} \qquad 1 - p_2 = p_{ud} + p_{dd} = 0.5250$$

sono rispettivamente le probabilità di rialzo e di ribasso del valore della seconda attività.

[44]Nella tabella 10 sono date le probabilità neutrali al rischio ripesttivamente di: p_{uu}, rialzo di V^1 e di V^2; p_{ud}, rialzo di V^1 e ribasso di V^2; p_{du}, ribasso di V^1 e rialzo di V^2; p_{uu}, ribasso sia di V^1 che di V^2.

[45]Si osserva inoltre che il valore della somma di opzioni strategicamente indipendenti risulta indipendente dal coefficiente di correlazione fra le attività reali sottostanti.

Tabella 10: Opzioni indipendenti: parametri

I_1	costo dell'investimento	160	
I_2	costo dell'investimento	90	
T_1	maturità prima opzione	3	(anni)
T_2	maturità seconda opzione	5	(anni)
r	tasso risk-free	0.06	
Δt	passo temporale	1	(anno)
u_1	fattore di rialzo di V^1	1.42	
d_1	fattore di ribasso di V^1	0.70	
u_2	fattore di rialzo di V^2	1.35	
d_2	fattore di ribasso di V^2	0.74	
p_{uu}	probabilità† di rialzo congiunto	0.1723	
p_{ud}	probabilità† di movimento antitetico	0.1973	
p_{du}	probabilità† di movimento antitetico	0.3027	
p_{dd}	probabilità† di ribasso congiunto	0.3277	
V_0^1	valore iniziale	100	
V_0^2	valore iniziale	80	

† Le probabilità assegnate sono da intendersi neutrali rispetto al rischio.

t	0	1	2	3
V_t^1	100	141.91	201.38	285.77
		70.47	100	141.91
			49.66	70.47
				34.99

Per il calcolo di V_t^1 si applica ricorsivamente la formula $V_{t+1}^i = \begin{cases} V_t^i \times u_i \\ V_t^i \times d_i \end{cases}$

Tabella 11: Albero binomiale del valore dell'attività reale V^1

Valutiamo per prima l'opzione di investimento nell'attività 1. La dinamica di $\{V_t^1\}$ è descritta nella tabella 11.[46] Il valore delle opzioni di investimento in tali attività sono calcolati nella tabella 12.

t	0	1	2	3
$F_1(t, V_t^1)$	5.31	15.24	43.78	125.77
		0	0	0
			0	0
				0

Si applica ricorsivamente la formula

$$F_i(T_i, V_{T_1}^i) = \max\left\{V_{T_i}^i - I_i, 0\right\}$$

per $t = T_i$ e

$$F_i(t, V_t^i) =$$
$$\max\left\{V_t^i - I_i, \frac{\left[p_i F_i\left(t + \Delta t, V_t^i u_i\right) + (1 - p_i) F_i\left(t + \Delta t, V_t^i d_i\right)\right]}{e^{r\Delta t}}\right\}$$

per ogni $t < T_i$.

Tabella 12: Valore dell'opzione di investimento nella prima attività

Il valore della seconda attività è dato nella tabella 13 e il valore dell'opzione di investimento, applicando ricorsivamente le medesime equazioni, è dato nella tabella 14.

t	0	1	2	3	4	5
V_t^2	80	107.99	145.77	196.77	265.61	358.54
		59.27	80	107.99	145.77	196.77
			43.90	59.27	80	107.99
				32.53	43.90	59.27
					24.10	32.53
						17.85

Tabella 13: Albero binomiale del valore dell'attività reale V^2

Il valore del progetto complessivo, alla data iniziale, $t = 0$, è dato semplicemente dalla somma di F_1 ed F_2:

$$G(0, V_t^0, V_0^2) = F_1(0, V_0^1) + F_2(0, V_0^2) = 5.31 + 19.44 = 24.75.$$

Può essere interessante estendere lo schema delle opzioni strategicamente indipendenti per valutare progetti di investimento in cui si ha, oltre che

[46] In realtà, l'albero nella tabella 11 risulta dalla proiezione dell'albero binomiale di $\{(V_t^1, V_t^2)\}$ sul piano (t, V_t^1). Lo stesso dicasi per l'albero nella tabella 13: si tratta in quel caso della proiezione sul piano (t, V_t^2).

t	0	1	2	3	4	5
$F_2(t, V_t^2)$	19.44	35.22	62.26	106.77	175.61	268.54
		7.46	14.90	29.32	56.66	106.77
			1.61	3.60	8.05	17.99
				0	0	0
					0	0
						0

Tabella 14: Valore dell'opzione di investimento nella seconda attività

rischio sistematico (o di mercato), anche rischio specifico. Questo rischio, pur non influenzando il premio per il rischio, condiziona l'esito dell'attività. Tratteremo quindi il caso in cui *a priori* sono disponibili molteplici opzioni reali ma la disponibilità di ciascuna risulta come conseguenza del verificarsi di un determinato evento. Sono esempi di questa situazione tutti i progetti di R&D, i quali sono soggetti a rischio tecnico. Ai nostri fini, le caratteristiche rilevanti di queste situazioni sono che

- il rischio è specifico del progetto considerato;
- la risoluzione dell'incertezza è puntuale nel tempo.

La prima caratteristica implica che *nessun premio va attribuito per il rischio in esame* (né secondo il CAPM, né secondo l'APT). La seconda caratteristica implica che, il rischio tecnico viene modellato mediante una variabile casuale discreta che ha come determinazioni i valori delle opzioni reali che conseguono dal verificarsi degli eventi possibili, secondo le probabilità assegnate agli eventi che costituiscono il rischio tecnico.

Ancora una volta, procederemo descrivendo un esempio. Sia dato un progetto d'investimento soggetto ad un rischio che presenta due esiti possibili. Da ciascun esito consegue una certa opportunità. I due esiti hanno rispettivamente probabilità q e $1 - q$ e l'incertezza su quale dei due esiti prevarrà si risolve ad una certa data T.[47] Supporremo che le opzioni disponibili al verificarsi dei due possibili esiti dipendano dal valore delle due attività reali introdotte nell'esempio precedente, e i cui alberi binomiali sono dati nelle tabelle 11 e 13. I parametri del problema sono quelli indicati nella tabella 10. La presenza del rischio specifico fa sì che il valore dell'insieme di opzioni mutuamente esclusive derivanti dai varî esiti possibili sia *la media dei valori delle singole opzioni, secondo le probabilità q e $1 - q$, scontata, in base al tasso privo di rischio, per il periodo T.* Quindi, il valore del progetto

[47] Come si vedrà, non c'è nessuna difficoltà ad estendere il modello al caso in cui l'incertezza tecnica possa risolversi in una fra un'insieme discreto e finito di scadenze possibili $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$: basta ripetere per ognuna della N date considerate, quanto diremo per le singole scadenze.

risulta

$$G(t, V_t) = \frac{\mathbb{E}_t^* \left[F_1(T, V_T)\right] q + \mathbb{E}_t^* \left[F_2(T, V_T)\right](1-q)}{e^{-r(T-t)}} \tag{41}$$

per ogni $t < T$, ove $\mathbb{E}_t^*[\cdot]$ è il valore atteso calcolato secondo la probabilità neutrale al rischio per $\{V_t\}$, condizionato all'informazione disponibile all'epoca t. Scritto in altro modo,

$$G(t, V_t) = \frac{\mathbb{E}^q \left[\mathbb{E}_t^* \left[F(T, V_T)\right]\right]}{e^{-r(T-t)}}$$

ove $F(T, V_T)$ è una variabile casuale con determinazioni possibili $F_1(T, V_T)$ e $F_2(T, V_T)$ e $\mathbb{E}^q[\cdot]$ è il valore atteso calcolato secondo la probabilità q.

Oltre ai parametri in tabella 10 si considerino quelli in tabella 15.

Tabella 15: Rischio specifico: parametri

T	epoca evento	1	(anni)
q	probabilità evento	0.7	
I_0	investimento iniziale	10	

Restano validi gli altri parametri di tabella 10.

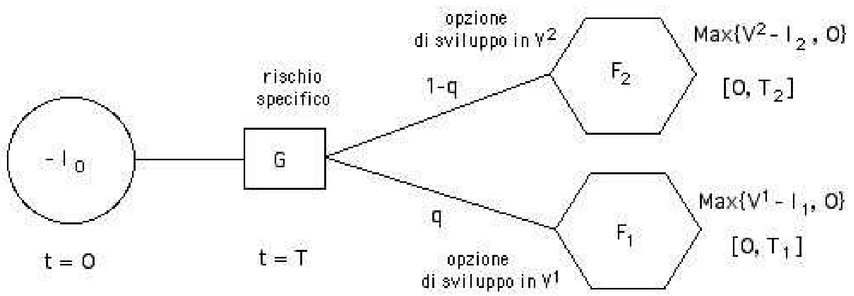

Figura 6: Rischio specifico di progetto.

La possibilità di esercitare una delle due opzioni di sviluppo indicate viene acquisita sostenendo un costo iniziale I_0 alla data iniziale. La decisione di sostenere questo costo è limitata alla data corrente.[48] Per effetto della presenza di questo rischio specifico, le opzioni di sviluppo potranno essere esercitate nell'intervallo $[T, T_i]$. La situazione è illustrata nella figura 6.

Dato che $T = 1$, in base alle tabelle 12 e 14,

$$\mathbb{E}_0^* \left[F_1(1, V_1^1)\right] = 15.24 \times 0.3696 + 0 \times 0.6304 = 5.63$$
$$\mathbb{E}_0^* \left[F_2(1, V_1^2)\right] = 35.22 \times 0.4750 + 7.46 \times 0.5250 = 20.64,$$

[48] Per maggior chiarezza, si può pensare ad un progetto di sfruttamento di una concessione petrolifera, le attività sottostanti essendo i valori attuali dei *cash flows* netti periodali derivanti dall'attività di estrazione rispettivamente di petrolio V^1 e gas V^2. La decisione di estrazione di gas o petrolio viene presa in base agli esiti dell'analisi geologica del sottosuolo. Il costo dell'esplorazione è I_0 e l'esito sarà noto in T.

e applicando l'equazione (41), si ha che il valore del progetto considerando anche il rischio specifico è

$$G(0, V_0^1, V_0^2) = \frac{5.63 \times 0.7 + 20.64 \times 0.3}{e^{-0.06}} = 9.55.$$

Quindi, essendo $I_0 = 10$, l'investimento non risulta conveniente.

7.4 Opzioni reali mutuamente esclusive

In questa sezione ci occuperemo ancora del caso in cui si ha *a priori* una molteplicità di opportunità, ma aggiungendo la considerazione che una solo di esse potrà essere esercitata a discapito delle altre.

Sono esempi di questa situazione la disponibilità di opzioni che prevedono azioni contrapposte sulla medesima attività reale. Si pensi alla possibilità di dismettere l'attività corrente se le condizioni si deteriorano o di espandere l'attività se le prospettive si propongono migliori di quanto preventivato: ovviamente, la possibilità di dismissione esclude quella di espansione.

In questi casi, si è chiamati a scegliere, fra le molteplici opzioni alternative, quella migliore in relazione allo stato in cui ci si viene a trovare. Il tratto fondamentale delle situazioni a cui faremo riferimento in questa sezione è che la scelta di un'opzione preclude le altre o, in modo equivalente, la scelta dell'opzione migliore è irreversibile. In tal senso, anche la scelta della migliore opzione ha un suo valore temporale.

Nel seguito, per semplicità di esposizione, ci limiteremo a descrivere il caso in cui siano date due sole opzioni alternative, dipendenti dal valore della stessa attività reale, essendo immediata l'estensione a più opzioni. Formalmente, detto $\{V_t\}$ il valore di un'attività reale, siano date due opzioni reali alternative su tale attività.

Su una certa attività reale si abbiano: un'opzione di investimento, con valore intrinseco $\pi_1(t, V_t) = \max\{e_1 V_t - I_1, 0\}$, prescindendo dalle altre opzioni, e maturità T_1; in conseguenza dell'opzione di investimento si hanno poi un'opzione di espansione, con valore intrinseco $\pi_2(t, V_t) = \max\{e_2 V_t - I_2, 0\}$ e maturità T_2; un'opzione di abbandono, con valore intrinseco $\pi_3(t, V_t) = \max\{S - kV_t, 0\}$ da esercitarsi entro T_3.

Il valore dell'attività reale è dato nella tabella 7. Indicato con $F_i(t, V_t)$, $i = 2, 3$ il valore di ciascuna opzione successiva all'esercizio dell'opzione di investimento, indicheremo con $G(t, V_t)$ il valore del "portafoglio" di opzioni, dato dalla scelta migliore delle opzioni a disposizione. Sia inoltre, senza perdita di generalità, $T_1 < T_2$ e $T_1 < T_3$.

I valori delle opzioni di abbandono e di espansione sono calcolati rispettivamente nelle tabelle 17 e 18. Il valore di G è calcolato nella tabella 19. Per comprendere il significato dell'equazione proposta nella tabella 19, si deve ricordare quanto detto a proposito dell'irreversibilità della scelta fra le due opzioni: dato che la scelta è possibile fino all'epoca T_2, occorre considerare

Tabella 16: Opzioni mutuamente esclusive: parametri

e_i	fattore di espansione	0.5	i=1,2
k	fattore di contrazione	0.5	
I_i	costo dell'investimento	50	i=1,2
S	valore di recupero	30	
T_1	maturità prima opzione	3	(anni)
T_2	maturità seconda opzione	4	(anni)
T_3	maturità seconda opzione	5	(anni)
r	tasso risk-free	0.05	
Δt	passo temporale	1	(anno)
u	fattore di rialzo	1.49	
d	fattore di ribasso	0.67	
p	probabilità di rialzo (risk-neutral)	0.3375	
V_0	valore iniziale	100	

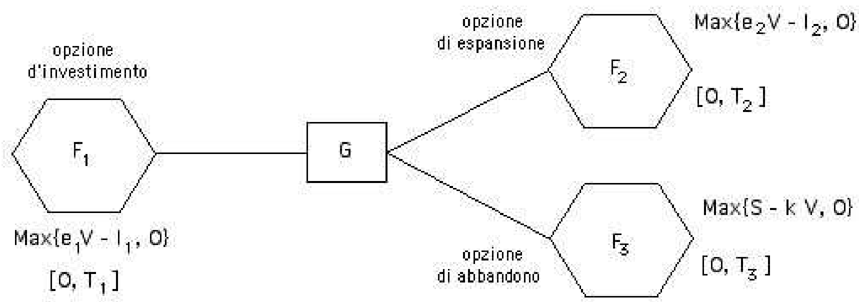

Figura 7: Opzioni reali mutuamente esclusive

la possibilità di rinviare la decisione fino al momento in cui non risulta più ottimale aspettare ulteriormente. Per questo motivo, ad ogni data anteriore a T_2, si devono confrontare non solo i valori delle due opzioni disponibili, ma anche la possibilità di mantenere in vita l'opzione di scelta per un ulteriore periodo. Quindi, si confrontano $F_1(t, V_t)$ e $F_2(t, V_t)$ tra loro e con il *valore di continuazione*, $e^{-r\Delta t}\mathbb{E}_t\left[G(t + \Delta t, V_{t+\Delta t})\right]$.

t	0	1	2	3	4	5
$F_3(t, V_t)$	6.17	2.36	0	0	0	0
		8.58	3.74	0	0	0
			11.71	5.93	0	0
				15.57	9.42	0
					19.91	14.94
						23.23

Si applicano ricorsivamente le formule

$$F_3(T_3, V_{T_3}) = \max\left\{S - kV_{T_3}, 0\right\}$$

e

$$F_3(t, V_t) =$$
$$\max\left\{S - kV_t, \frac{\left[pF_3\left(t + \Delta t, V_t u\right) + (1-p)F_3\left(t + \Delta t, V_t d\right)\right]}{e^{r\Delta t}}\right\}$$

Tabella 17: Valore dell'opzione di abbandono

Nell'ipotesi che l'opzione d'investimento iniziale sia già stata esercitata, è interessante notare che il valore dell'opzione sul massimo delle due successive opzioni è maggiore del massimo dei valori correnti di tali opzioni: nel caso specifico, mentre $G(0, V_0) = 16.65$,

$$\max\{F_2(0, V_0), F_3(0, V_0)\} = \max\{6.17, 9.51\} = 9.51.$$

Questo si spiega ricordando che la scelta dell'opzione migliore tra l'espansione e l'abbandono dell'attività non avviene all'epoca iniziale, ma solo nell'istante in cui non risulta più conveniente rinviare ulteriormente tale scelta. Si avrebbe l'uguaglianza tra il valore dell'opzione di scelta e il maggiore tra i valori delle due opzioni solo se nell'istante corrente fosse conveniente scegliere. Nel caso in esame, invece, possiamo aspettare il momento migliore per decidere.

A questo punto, non resta che valutare l'iniziale opzione d'investimento. Si tratta di un'opzione composta (opzione su opzione). Per questo motivo, il suo valore intrinseco risulta, in base a quanto illustrato nella sezione 7.2, $\max\left\{e_1 V_t - I_1 + G(t, V_t), 0\right\}$. I valori sono presentati nella tabella 20.

In conclusione, risulta che il valore corrente del "portafoglio" di opzioni,

t	0	1	2	3	4
$F_2(t, V_t)$	9.51	24.65	61.28	116.01	197.65
		2.53	7.89	24.59	61.28
			0	0	0
				0	0
					0

Si applicano ricorsivamente le formule

$$F_2(T_2, V_{T_2}) = \max\{e_2 V_{T_2} - I_2, 0\}$$

e

$$F_2(t, V_t) = \max\left\{ e_2 V_t - I_2, \frac{[pF_2(t+\Delta t, V_t u) + (1-p)F_2(t+\Delta t, V_t d)]}{e^{r\Delta t}} \right\}.$$

Tabella 18: Valore dell'opzione di espansione

t	0	1	2	3	4
$G(t, V_t)$	15.68	27	61.28	116.01	197.65
		11.12	11.63	24.59	61.28
			11.71	5.93	0
				15.57	9.42
					19.91

Si applicano ricorsivamente le formule

$$G(T_2, V_{T_2}) = \max\{F_2(V_{T_2}), F_3(V_{T_2}), 0\}$$

e

$$G(t, V_t) = \max\left\{ F_2(V_t), F_3(V_t), \frac{[pG(t+\Delta t, V_t u) + (1-p)G(t+\Delta t, V_t d)]}{e^{r\Delta t}} \right\}.$$

Tabella 19: Valore dell'opzione di scelta della migliore fra espansione e abbandono

t	0	1	2	3
$F_1(t, V_t)$	19.76	51.60	122.55	232.01
		5.07	15.79	49.18
			0	0
				0

Si applicano ricorsivamente le formule

$$F_1(T_2, V_{T_2}) = \max\{e_1 V_{T_2} - I_1 + G(T_2, V_{T_2}), 0\}$$

e

$$F_1(t, V_t) = \max\left\{e_1 V_t - I_1 + G(t, V_t), \frac{[pF_1(t + \Delta t, V_t u) + (1-p)F_1(t + \Delta t, V_t d)]}{e^{r\Delta t}}\right\}.$$

Tabella 20: Valore dell'opzione d'investimento

dopo aver opportunamento considerato la loro interazione, è $F_1(0, V_0) = 19.76$.

Riferimenti bibliografici

[1] F. Black and M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (1973), pp. 637–659.

[2] M. C. Bogue and R. Roll, *Capital budgeting of risky projects with 'imperfect' markets for physical capital*, Journal of Finance, 29 (1974), pp. 601–613.

[3] R. A. Brealey and S. C. Myers, *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill Inc., New York, NY, 1991. fourth edition.

[4] M. J. Brennan, *Costless financing policies under asymmetric information*, working paper, University of British Columbia, June 1986.

[5] J. H. Cochrane, *Asset Pricing*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[6] G. M. Constantinides, *Market risk adjustment in project valuation*, Journal of Finance, 33 (1978), pp. 603–616.

[7] T. E. Copeland and J. F. Weston, *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison-Wesley, Readings, MA, 1992. Third edition.

[8] J. Cox, A. Ross, and M. Rubinstein, *Option pricing: a simplified approach*, Journal of Financial Economics, 7 (1979), pp. 229–263.

[9] A. Dixit and R. Pindyck, *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

[10] L. Guatri, *La teoria di creazione del valore*, EGEA, Milano, Italia, 1991.

[11] R. S. Hamada, *Portfolio analysis, market equilibrium and corporation finance*, Journal of Finance, 24 (1969), pp. 13–31.

[12] J. Harrison and D. Kreps, *Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets*, Journal of Economic Theory, 20 (1979), pp. 381–408.

[13] C. C. Hsia, *Coherence of the modern theories of finance*, Financial Review, Winter (1981), pp. 27–42.

[14] J. Lintner, *Security prices, risk and maximal gains from diversification*, Journal of Finance, 20 (1965), pp. 587–615.

[15] ——, *The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets*, Review of Economics and Statistics, 47 (1965), pp. 13–37.

[16] S. P. Mason and R. C. Merton, *The role of contingent claims analysis in corporate finance*, in Recent advances in corporate finance, E. I. Altman and M. G. Subrahmanyam, eds., Homewood, IL, 1985, Irwin, pp. 7–54.

[17] R. C. Merton, *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1973), pp. 141–183.

[18] ——, *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*, Journal of Finance, 29 (1974), pp. 449–470.

[19] F. Modigliani and M. H. Miller, *The cost of capital, corporation finance and the theory of investment*, American Economic Review, 48 (1958), pp. 261–297.

[20] ——, *Corporate income taxes and the cost of capital: a correction*, American Economic Review, 53 (1963), pp. 433–443.

[21] J. Mossin, *Equilibrium in a capital asset market*, Econometrica, 34 (1966), pp. 768–783.

[22] S. C. Myers, *Interactions of corporate financing and investment decisions - implications for capitalbudgeting*, Journal of Finance, 29 (1974), pp. 1–25.

[23] A. Rappaport, *Creating Shareholder Value. A Guide for Managers and Investors*, The Free Press, New York, NY, 1986.

[24] A. Robichek and S. C. Myers, *Optimal Financing Decisions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.

[25] ——, *Conceptual problems in the use of risk-adjusted discount rates*, Journal of Finance, 21 (1966), pp. 727–730.

[26] R. Roll and S. A. Ross, *An empirical investigation of the arbitrage pricing theory*, Journal of Finance, 35 (1980), pp. 1073–1103.

[27] S. A. Ross, *The arbitrage theory of capital asset pricing*, Journal of Economic Theory, 13 (1976), pp. 341–360.

[28] S. A. Ross, R. W. Westerfield, and J. F. Jaffe, *Finanza Aziendale*, il Mulino, Bologna, Italia, 1996.

[29] M. E. Rubinstein, *A mean-variance synthesis of corporate financial theory*, Journal of Finance, 28 (1973), pp. 167–181.

[30] W. F. Sharpe, *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under condition of risk*, Journal of Finance, 19 (1964), pp. 425–442.

[31] G. Sick, *Tax-adjusted discount rates*, Management Science, 36 (1990), pp. 1432–1450.

[32] J. von Neumann and D. Morgestern, *Theory of Game and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953.